Rafał M. Łochowski
Szkoła Główna Handlowa w Warszawie

O pewnym modelu pojawiania się szkód

Ogólnopolska Konferencja Aktuarialna
Zagadnienia aktuarialne – teoria i praktyka
Warszawa, IE SGH 2009

Modele pojawiania się szkód

- Model Poissona
  - Zalety: brak pamięci, możliwość modelowania intensywności pojawiania się szkód w czasie za pomocą funkcji intensywności
  - Wady: brak możliwości modelowania intensywności w zależności od liczby zaistniałych szkód
- Model Sparre-Andersena (proces odnowy)
  - Zalety – uogólnienie jednorodnego procesu Poissona, inne niż niejednorodny proces Poissona czy nawet proces Coxa
  - Wady – brak możliwości modelowania intensywności w zależności od liczby zaistniałych szkód (jak w przypadku procesu Poissona), co więcej - brak możliwości modelowania liczby szkód w czasie

Założenia prowadzące do pewnego innego modelu

1. W portfelu firmy ubezpieczeniowej znajduje się **n** niezależnych ryzyk
2. Każde ryzyko może wygenerować dokładnie jedną szkodę, po czym wygasa
3. Prawdopodobieństwo zajścia szkody w przedziale **[t, t+Δ]** (po warunkiem, że nie zaszła wcześniej) zależy tylko od Δ i jest takie samo dla każdego z ryzyk

Wnioski płynące z założeń

- Z założenia 3. wynika, że czas oczekiwania na szkodę wygenerowaną przez pojedyncze, i-te ryzyko, $\mathbf{T_i}$, jest **wykładniczy z takim samym parametrem λ dla każdego z ryzyk**
- Z niezależności ryzyk wynika, że czasy oczekiwania są niezależne

Wnioski, c.d.

- Niech $\mathbf{T_{(1)} \leq T_{(2)} \leq \ldots \leq T_{(n)}}$ będą statystykami pozycyjnymi ciągu $\mathbf{T_1, T_2, \ldots, T_n}$
- $\mathbf{T_{(i)}}$ – moment napłynięcia i-tej szkody
- Łatwo można udowodnić (Feller, T. II), że czasy między kolejnymi szkodami

$$\mathbf{T_{(1)} \sim Exp(n\lambda),}$$

$$\mathbf{T_{(2)} - T_{(1)} \sim Exp((n-1)\lambda),}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\mathbf{T_{(n)} - T_{(n-1)} \sim Exp(\lambda)}$$

są niezależnymi zmiennymi losowymi

Proces liczby szkód

- Niech

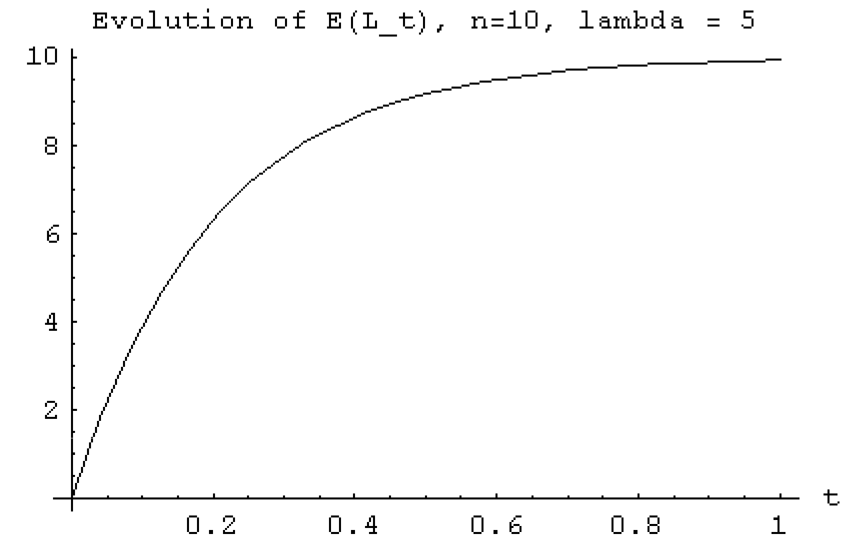
$$L_t = \max\{k: T_{(k)} \le t\}$$

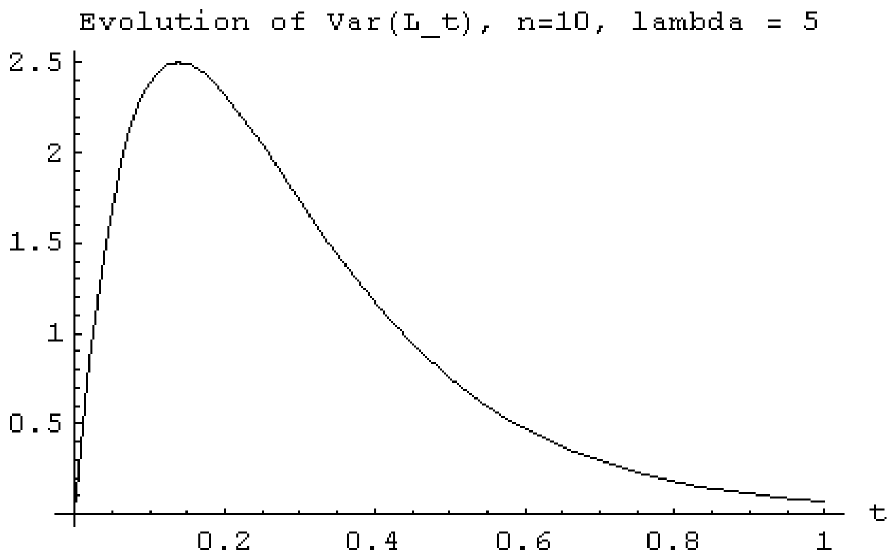
  oznacza liczbę szkód, które napłynęły do momentu t
- Bardzo łatwo udowodnić, że

$$L_t \sim \mathrm{Bin}(n, 1-\exp(-\lambda t))$$

- **Wniosek – nie jest to ani proces Poissona ani proces Sparre-Andersena! (warunkowany, że liczba szkód nie przekracza n)**

Parę rysunków





Własności procesu liczby szkód

- Proces nie ma przyrostów niezależnych
- Jest to proces Markowa (co wynika z braku pamięci rozkładu wykładniczego)

  o następujących prawdopodobieństwach przejścia

  $$\left(L_{t\_k} - L_{t\_k-1} \mid L_{t\_1}, L_{t\_2}, \dots, L_{t\_k-1}\right) \sim \mathbf{Bin}\left(n - L_{t\_k-1},\ 1-\exp(-\lambda(t_k - t_{k-1}))\right)$$

- Obserwacja: gdy $n \to \infty$, $\lambda n \to \lambda_0$, wówczas nasz proces zbiega (w jakim sensie?) do procesu Poissona o intensywności λ_0

Uogólnienie modelu

- Niech $\Delta_1 \sim \mathbf{Exp}(\boldsymbol{\lambda}_1)$, $\Delta_2 \sim \mathbf{Exp}(\boldsymbol{\lambda}_2)$,…, $\Delta_n \sim \mathbf{Exp}(\boldsymbol{\lambda}_n)$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi
- Niech

$$\mathbf{T}_{(1)} = \Delta_1,$$
$$\mathbf{T}_{(2)} = \Delta_1 + \Delta_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\mathbf{T}_{(n)} = \Delta_1 + \Delta_2 + \ldots + \Delta_n$$

- Uwaga: $\mathbf{T}_{(i)}$ nie jest statystyką pozycyjną!
- Uwaga: dopuszczamy $\mathbf{n=\infty}$
- Δ_i są czasami między kolejnymi szkodami
- $\mathbf{T}_{(i)}$ są momentami pojawiania się kolejnych szkód

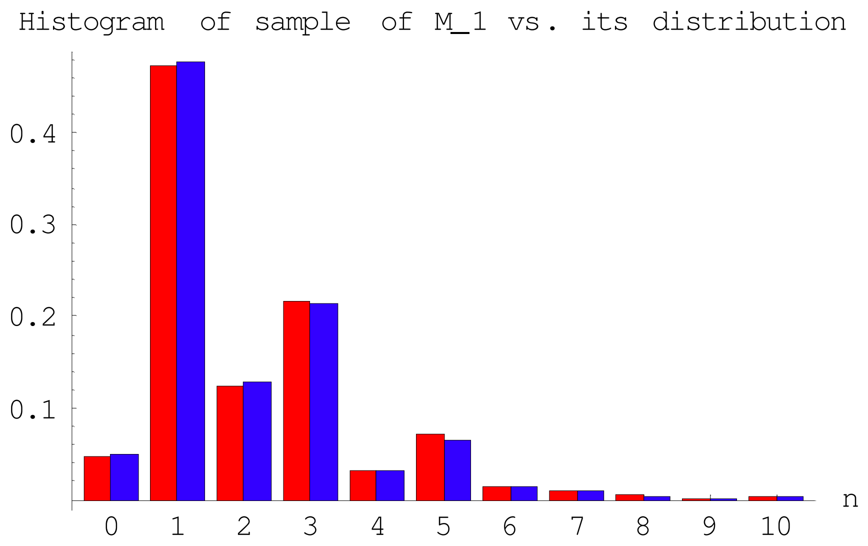
Uogólnienie modelu, c.d.

- Ponownie, niech
$$\mathbf{M_t = \max\{k : T_{(k)} \le t\}}$$
oznacza liczbę szkód, które napłynęły do momentu t (**M_t – czysty proces urodzin**)
- Rozkład zmiennej **M_t**?
- **$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda$, ($M_t$) -** proces Poissona
- **$\lambda_1 = \lambda n, \lambda_2 = \lambda(n-1), \ldots, \lambda_n = \lambda$, ($M_t$) –** „nasz" model
- **$\lambda_1 = \lambda, \lambda_2 =$** $2\lambda, \ldots,$ **-** (**M_t**) – proces Yule'a (**M_t** ma rozkład geometryczny, Feller, T. I)

Rozkład $\mathbf{M_t}$ dla dowolnych $\boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_2 \ldots$

- W ogólnym przypadku rozkład $\mathbf{M_t}$ można najprościej otrzymać za pomocą metody Monte Carlo
- Przykład: t=1,

$(\boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_2, \ldots, \boldsymbol{\lambda}_{10}) = (3,1,4,1.5,9,2,6,5.3,8,9.7)$



Dynamika procesu ($\mathbf{M_t}$)

- Oznaczmy

$$\mathbf{P(M_t=k)=:P(k;t;\lambda_1,\lambda_2,\ldots)}$$

- Proces ($\mathbf{M_t}$) jest procesem Markowa
- Proces ($\mathbf{M_t}$) nie ma niezależnych przyrostów, lecz

$$\mathbf{P(M_{t\_k}-M_{t\_k-1}=k \mid M_{t\_k-1}=m, \ldots, M_{t\_1}) = P(k; t_k-t_{k-1}; \lambda_m, \lambda_{m+1}, \ldots)}$$

Proces ($\mathbf{M}_t$) - uwagi

- Dla **n=∞** nie jest jasne czy zdefiniowany proces nie eksploduje (z niezerowym prawdopodobieństwem napłynie nieskończona liczba szkód)
- Można podać analityczne formuły na

$$\mathbf{P}(k;t;\lambda_1,\lambda_2,\ldots),$$

  formuły te są jednak skomplikowane

  i numerycznie niestabilne
- Zachodzi pytanie o przydatność uogólnionego modelu do modelowania pojawiania się szkód

Problem eksplozji i istnienia momentów procesu ($\mathbf{M_t}$)

- Warunek konieczny i wystarczający na brak eksplozji (Feller, T. I)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} = +\infty$$

- Warunek wystarczający na istnienie momentu rzędu p≥1

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{p-1}}{\left(1+\alpha / \lambda_1\right)\left(1+\alpha / \lambda_2\right)\ldots\left(1+\alpha / \lambda_2\right)} = +\infty$$

dla pewnego $\alpha > 0$

Formuły analityczne

- Jeżeli $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ są parami różne, wówczas

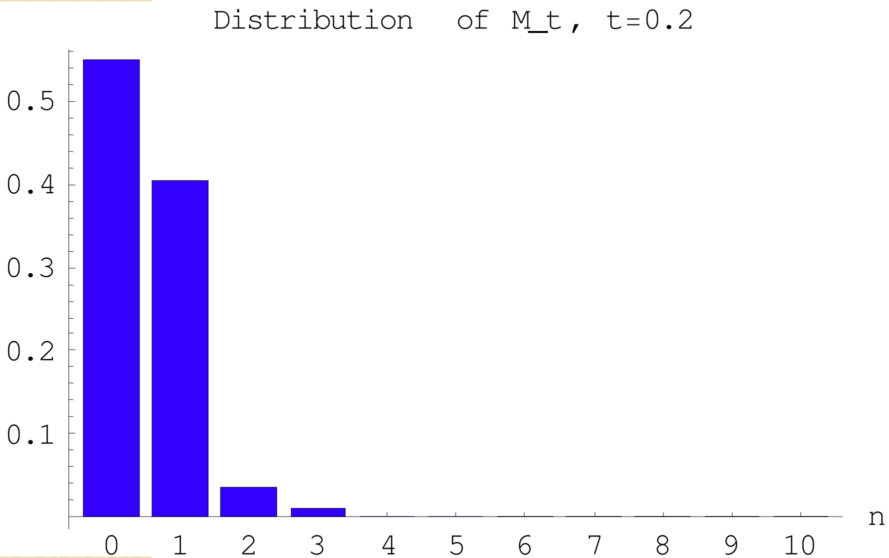
$$\mathbf{P}\left(M_t = k\right) = \left(\prod_{j=1}^{k} x_j\right) \sum_{i=1}^{k} \frac{1-\exp\left(-t_i x_i\right)}{x_i \prod_{j=1, j\neq i}^{k} \left(x_j - x_i\right)}$$

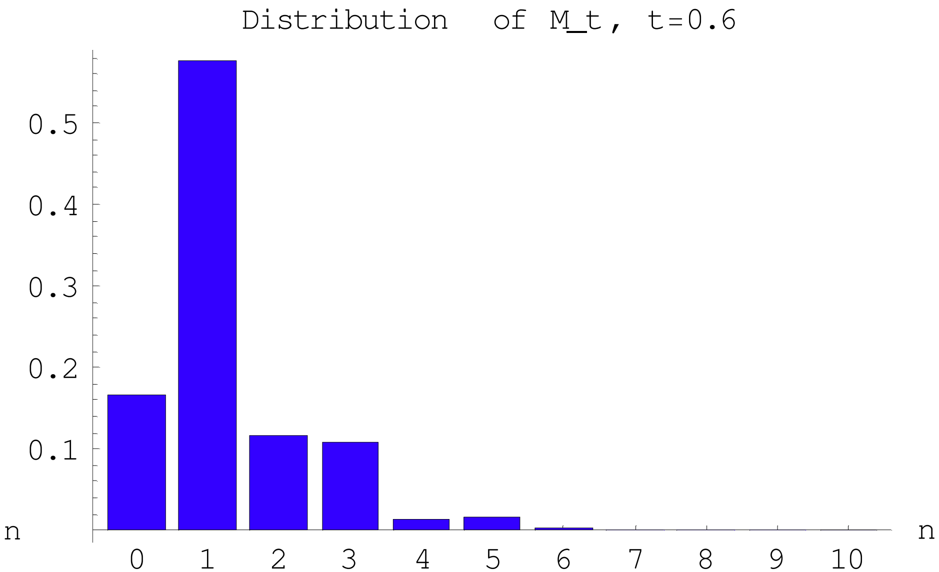
$$-\left(\prod_{j=1}^{k+1} x_j\right) \sum_{i=1}^{k+1} \frac{1-\exp\left(-t_i x_i\right)}{x_i \prod_{j=1, j\neq i}^{k+1} \left(x_j - x_i\right)}, \quad \text{dla } k = 1,2,\ldots,n-1$$

- Formuły te można uzyskać za pomocą metod odwrotnej transformaty Fouriera i rachunku residuów

Zastosowanie formuł – obliczanie rozkładów

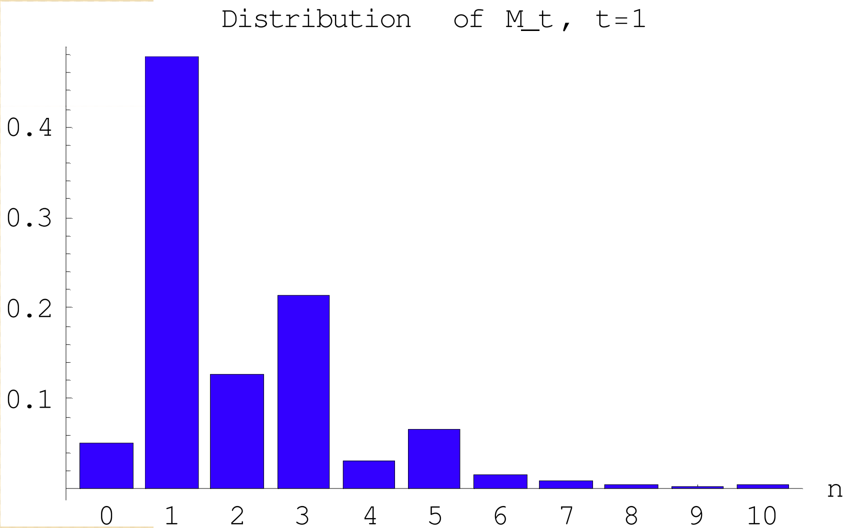
- $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{10}) = (3,1,4,1.5,9,2,6,5.3,8,9.7)$, $t=0.2$, $t=0.6$

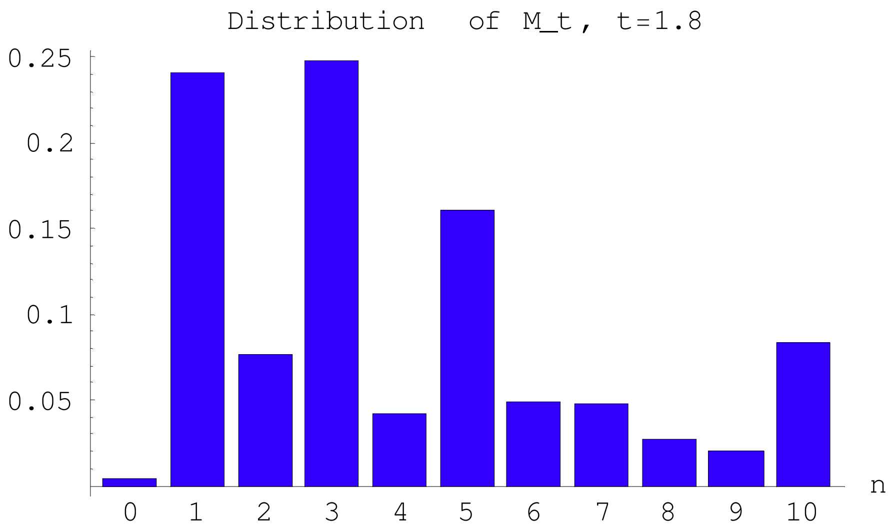




Zastosowanie formuł – obliczenie rozkładów, c. d.

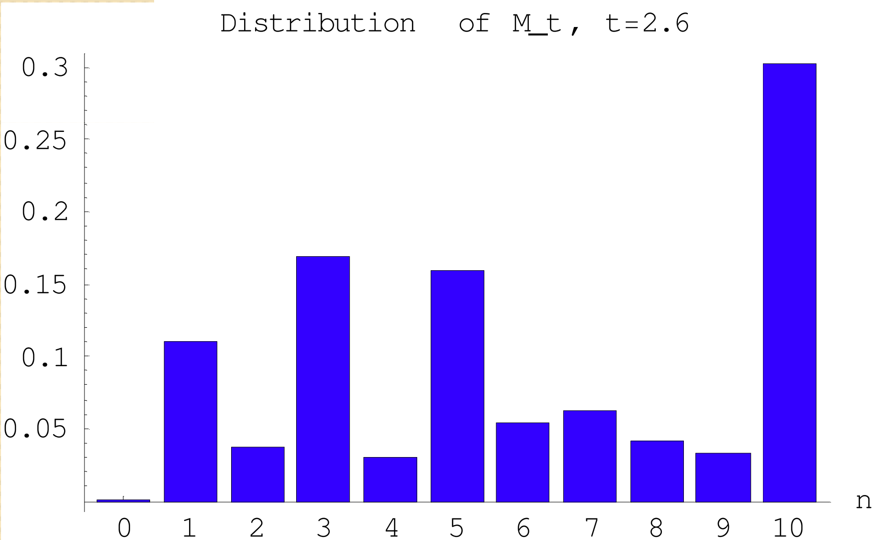
- $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{10}) = (3,1,4,1.5,9,2,6,5.3,8,9.7)$, $t = 1$, $t=1.8$

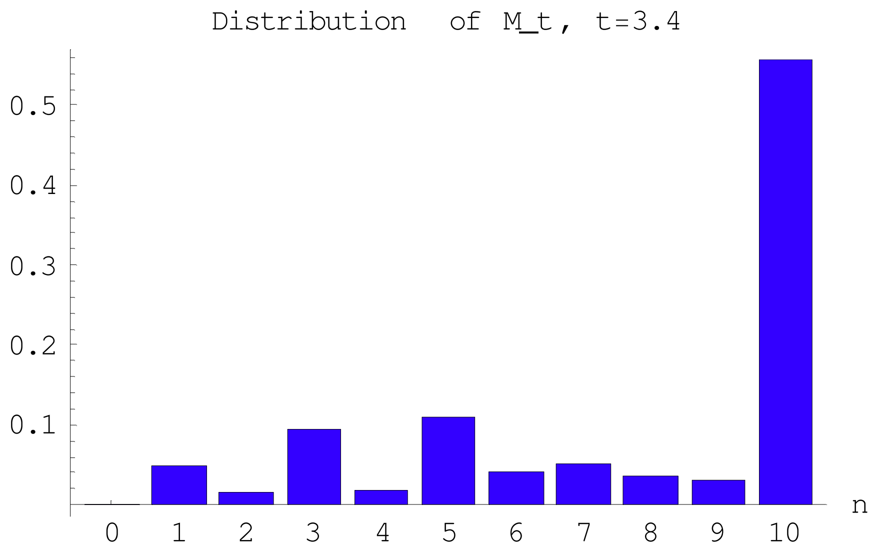




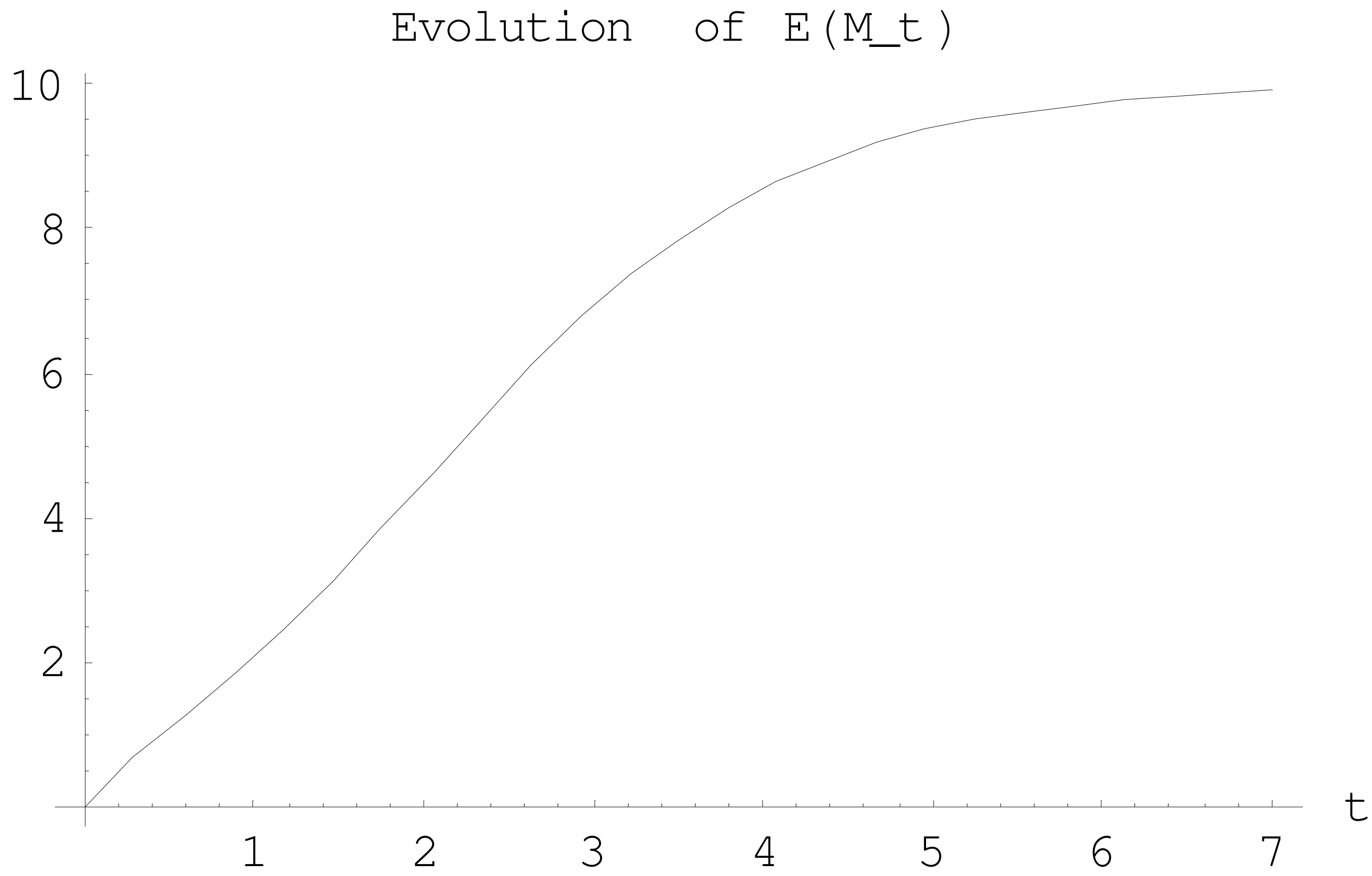
Zastosowanie formuł – obliczenie rozkładów, c. d.

- $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{10}) = (3,1,4,1.5,9,2,6,5.3,8,9.7)$, $t = 2.6$, $t = 3.4$

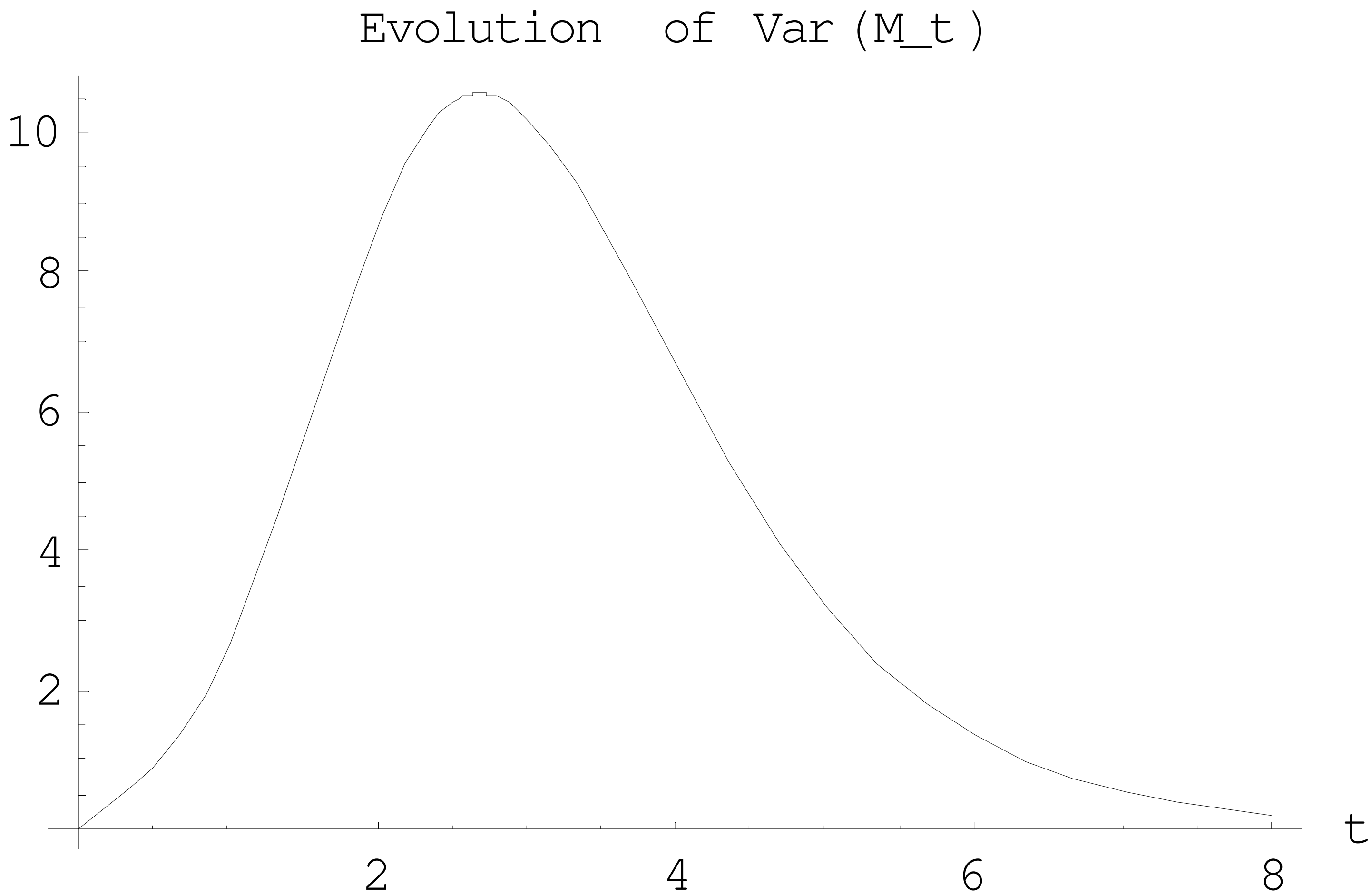




Ewolucja wartości oczekiwanej



Ewolucja wariancji



Uwagi nt. przydatności

- Rodzina możliwych rozkładów zmiennych $\mathbf{M_t}$ jest bardzo bogata i obejmuje rozkłady o skończonej jak i o nieskończonej liczbie wartości
- Czyste procesy urodzin pozwalają na modelowanie „intensywności" napływania szkód w zależności od dotychczasowej ich liczby
- Wydaje się jednak, że sama rodzina czystych procesów urodzin może być niewystarczająca. Propozycja – bardziej adekwatnym modelem może być uogólnienie czystego procesu urodzin, w którym $\boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_2 \ldots$ jest łańcuchem Markowa.

Bibliografia

- Cox, D. R., *Renewal Theory*, Methuen & Co. 1962
- Łochowski, R. *On certain model of claim arrival*, `http://akson.sgh.waw.pl/~rlocho/LochowskiWIEM09.pdf`

Pytania, komentarze?

DZIĘKUJĘ ZA UWAGĘ!