Wariacje na temat Twierdzenia Banacha o Indykatrysie i ich zastosowanie

Rafał M. Łochowski

Wrocław 2015

Plan odczytu

1. Twierdzenie Banacha o Indykatrysie i jego uogólnienie
2. Zastosowanie do estymacji wartości oczekiwanej uciętego wahania
3. Problem Skorohoda na $[-c/2, c/2]$ i liczby przecięć (przeskoków) przedziałów
4. Asymptotyka uciętego wahania a czasy lokalne

Twierdzenie Banacha o Indykatrysie

Niech $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. *Twierdzenie Banacha o Indykatrysie* (Banach 1925, Vitali 1926) podaje ciekawy związek pomiędzy wahaniem całkowitym funkcji f, zdefiniowanym jako

$$\mathrm{TV}(f, [a, b]) := \sup_n \sup_{a \leqslant t_0 < t_1 < \ldots < t_n \leqslant b} \sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|$$

oraz liczbą przecięć poziomów przez funkcję f, zdefiniowaną jako

$$N^y(f) := \#\{x \in [a, b] : f(x) = y\}.$$

($\#A \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ oznacza liczbę elementów zbioru A.)

Twierdzenie Banacha o Indykatrysie, c.d.

Okazuje się, że $\mathbb{R} \ni y \mapsto N^y \in \{0, 1, 2, \ldots\} \cup \{+\infty\}$ jest funkcją klasy Baire'a $\leqslant 2$.

(Funkcje klasy Baire'a 0 to funkcje ciągłe.
Funkcje klasy Baire'a 1 to funkcje, które są granicami punktowymi funkcji ciągłych.
Funkcje klasy Baire'a 2 to funkcje, które są granicami punktowymi funkcji klasy Baire'a $\leqslant 1$ itd.)

Co ważniejsze, pomiędzy N a wahaniem całkowitym f zachodzi następujący związek

$$\mathrm{TV}(f, [a, b]) = \int_{\mathbb{R}} N^y\,(f)\,\mathrm{d}y.$$

Twierdzenie Banacha o Indykatrysie - uogólnienie na przypadek funkcji regulowanych

Twierdzenie Banacha o Indykatrysie można uogólnić (Lozinskii 1948,1958) na przypadek tzw. funkcji regulowanych, czyli funkcji, które posiadają granice prawostronne oraz granice lewostronne (alternatywna definicja: funkcje regulowane to te, które są granicami jednostajnymi funkcji schodkowych). Wtedy jednak należy odpowiednio zdefiniować liczbę przecięć poziomów.

Pomysł jest taki, że dziedzinę funkcji f się "rozdmuchuje" w punktach jej nieciągłości (takich punktów jest przeliczalnie wiele) a następnie łączy się wartości w tych punktach z wartościami granic prawostronnych i lewostronnych linią prostą tak aby powstała funkcja była ciągła i miała takie samo wahanie jak funkcja wyjściowa.

Twierdzenie Banacha o Indykatrysie - uogólnienie na funkcje regulowane o nieskończonym wahaniu

Twierdzenie Banacha o Indykatrysie i jego uogólnienie niewiele mówią w przypadku gdy f ma wahanie nieskończone. Okazuje sie jednak, ze można je "sensownie" uogólnić, gdy zamiast przecięć poziomów będziemy rozpatrywać przecięcia przedziałów.

Definicja

Niech $c \geqslant 0$. Zdefiniujmy $\sigma_0^c = a$ oraz dla $n = 0, 1, \ldots$

$$\tau_n^c = \inf \{ t > \sigma_n^c : t \leqslant b, f(t) > y + c \},$$

$$\sigma_{n+1}^c = \inf \{ t > \tau_n^c : t \leqslant b, f(t) < y \}.$$

Wówczas liczbę przeskoków w dół f z nad poziomu $y + c$ do poziomu y definiujemy jako

$$d_c^y (f, [a, b]) := \max \{ n : \sigma_n^c \leqslant b \}.$$

Twierdzenie Banacha o Indykatrysie - uogólnienie na funkcje regulowane o nieskończonym wahaniu, c.d.

Definicja

Niech $c \geqslant 0$. Zdefiniujmy $\tilde{\sigma}_0^c = a$ oraz dla $n = 0, 1, \ldots$

$$\tilde{\tau}_n^c = \inf \{ t > \tilde{\sigma}_n^c : t \leqslant b, f(t) < y \},$$

$$\tilde{\sigma}_{n+1}^c = \inf \{ t > \tilde{\tau}_n^c : t \leqslant b, f(t) > y + c \}.$$

Wówczas liczbę przeskoków w górę f z poziomu y nad poziom $y + c$ definiujemy jako

$$u_c^y (f, [a, b]) := \max \{ n : \tilde{\sigma}_n^c \leqslant b \}.$$

Na koniec zdefiniujmy

Definicja

$$n_c^y (f, [a, b]) := d_c^y (f, [a, b]) + u_c^y (f, [a, b]).$$

Twierdzenie Banacha o Indykatrysie - uogólnienie na funkcje regulowane o nieskończonym wahaniu, c.d.

W przypadku gdy $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest funkcją regulowaną, wówczas n_c^y jest liczbą skończoną dla dowolnego $c > 0$.

Co więcej, dla $c > 0$ zachodzi równość

$$\int_{\mathbb{R}} n_c^y \left(f, [a, b]\right) \mathrm{d}y = \mathrm{TV}^c(f, [a, b]) \,, \tag{1}$$

gdzie $\mathrm{TV}^c(f, [a, b])$ jest *uciętym wahaniem* zdefiniowanym jako

$$\mathrm{TV}^c(f, [a, b]) := \sup_n \sup_{a \leqslant t_0 < t_1 < \ldots < t_n \leqslant b} \sum_{i=1}^{n} \max \left\{ \left| f(t_i) - f(t_{i-1}) \right| - c, 0 \right\} . \tag{2}$$

Uwaga

Dla dowolnej funkcji regulowanej $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ i dowolnego $c > 0$, $TV^c(f, [a, b]) < +\infty$.

Twierdzenie Banacha o Indykatrysie a równość (1)

Ponieważ równość $n_0^y(f,[a,b]) = N^y(f)$ zachodzi dla prawie wszystkich (poza przeliczalnym zbiorem) liczb rzeczywistych y, to równość

$$\int_{\mathbb{R}} n_c^y(f,[a,b])\,\mathrm{d}y = \mathrm{TV}^c(f,[a,b])$$

można potraktować jako uogólnienie Twierdzenia Banacha o Indykatrysie. Zachodzą również następujące równości

$$\int_{\mathbb{R}} u_c^y(f,[a,b])\,\mathrm{d}y = \mathrm{UTV}^c(f,[a,b])$$

oraz

$$\int_{\mathbb{R}} d_c^y(f,[a,b])\,\mathrm{d}y = \mathrm{DTV}^c(f,[a,b])\,.$$

Ucięte wahanie w górę, ucięte wahanie w dół

Po prawej stronie dwóch poprzednich równości występują ucięte wahanie w górę i ucięte wahanie w dół, zdefiniowane za pomocą wzorów

$$\mathrm{UTV}^c(f,[a,b]) := \sup_n \sup_{a\leqslant t_0<t_1<\ldots<t_n\leqslant b} \sum_{i=1}^n \max\left\{f(t_i)-f(t_{i-1})-c,0\right\}$$

oraz

$$\mathrm{DTV}^c(f,[a,b]) := \sup_n \sup_{a\leqslant t_0<t_1<\ldots<t_n\leqslant b} \sum_{i=1}^n \max\left\{f(t_{i-1})-f(t_i)-c,0\right\}.$$

Zauważmy, że w przypadku $c=0$, $\mathrm{UTV}^c(f,[a,b])$ i $\mathrm{DTV}^c(f,[a,b])$ są niczym innym jak dodatnim i ujemnym wahaniem (całkowitym) funkcji f występującymi w klasycznym rozkładzie Jordana. Ponadto zachodzi wzór

$$\mathrm{TV}^c(f,[a,b]) = \mathrm{UTV}^c(f,[a,b]) + \mathrm{DTV}^c(f,[a,b]).$$

Szkic dowodu, że $\int_{\mathbb{R}} u_c^y(f,[a,b])\,dy = \mathrm{UTV}^c(f,[a,b])$

1. (techniczny) krok polega na zauważeniu, że twierdzenie wystarczy udowodnić dla funkcji schodkowych postaci

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n} f_{2k} 1_{\{t(2k)\}}(t) + \sum_{k=0}^{n-1} f_{2k+1} 1_{(t(2k+1);t(2k+2))}(t),$$

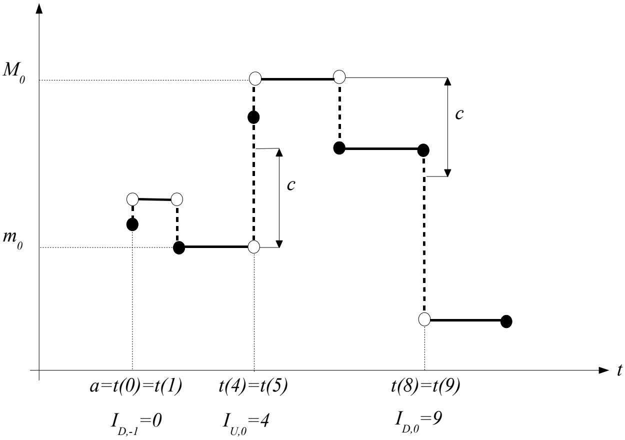
gdzie
$a = t(0) = t(1) < t(2) = t(3) < \ldots < t(2n-2) = t(2n-1) < t(2n) = b.$
2. krok polega, że ucięte wahanie w górę można obliczyć jako sumę przyrostów funkcji f (pomniejszonych o c) na przedziałach kolejnych spadków o c :

$$\mathrm{UTV}^c(f,[a,b]) = \sum_{k=0}^{K} \{M_k - m_k - c\} = \int_{\mathbb{R}} \sum_{k=0}^{K} 1_{(m_k, M_k - c)}(y)\,dy.$$

3., ostatni krok polega na zauważeniu równości

$$u_c^y(p,[0,2n]) = \#\{k \in \{0,1,\ldots,K\} : y \in (m_k, M_k - c)\}.$$

Ilustracja



Przykład zastosowania

Niech $W_t = \mu t + B_t$, $t \geqslant 0$, będzie ruchem Browna z dryfem (B_t, $t \geqslant 0$, jest standardowym ruchem Browna) zastopowanym w losowym, niezależnym od B czasie τ, o rozkładzie wykładniczym z parametrem v. Mamy równość

$$\mathbb{E}\mathrm{UTV}^c(W,[a,b]) = \mathbb{E}\int_{\mathbb{R}} u_c^y(W,[a,b])\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}u_c^y(W,[a,b])\,\mathrm{d}y.$$

Prawdopodobieństwa przekroczenia poziomu danego poziomu przez ruch Browna z dryfem do czasu τ są znane, więc korzystając z mocnej markowskości i braku pamięci rozkładu wykładniczego otrzymujemy

$$\mathbb{E}u_c^y(W,[0,\tau]) = \frac{e^{\mu(y+c)-(|y|+c)\sqrt{\mu^2+2v}}}{1-e^{-2c\sqrt{\mu^2+2v}}}$$

a stąd

$$\mathbb{E}\mathrm{UTV}^c(W,[0,\tau]) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{\mu(y+c)-(|y|+c)\sqrt{\mu^2+2v}}}{1-e^{-2c\sqrt{\mu^2+2v}}}\mathrm{d}y = \frac{e^{\mu c}\sqrt{\mu^2+2v}}{2v\sinh\left(c\sqrt{\mu^2+2v}\right)}.$$

Twierdzenie Banacha o Indykatrysie - kolejne uogólnienie

Kolejnym możliwym uogólnieniem Twierdzenie Banacha o Indykatrysie byłoby podanie formuły na

$$\int_{\mathbb{R}} n_c^y\left(f,[a,b]\right) m(y)\mathrm{d}y$$

czyli gdy pewne poziomy y są wyróżnione w stosunku do innych.

Niestety tego typu uogólnienie nie jest znane, jednak gdy f jest funkcją càdlàg , można wówczas podać zadowalające (z punktu możliwych zastosowań) formuły na

$$\int_{\mathbb{R}} u_c^y\left(f,[a,b]\right) m(y)\mathrm{d}y$$

oraz

$$\int_{\mathbb{R}} d_c^y\left(f,[a,b]\right) m(y)\mathrm{d}y.$$

Problem Skorohoda na $[-c/2, c/2]$ a liczby przecięć (przeskoków) przedziałów

Okazuje się, że liczba przecięć (przeskoków) przedziału $[y, y+c]$ przez dowolną funkcję càdlàg $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest zawsze prawie równa liczbie przecięć poziomu $y + c/2$ przez rozwiązanie tzw. problemu Skorohoda na odcinku $[-c/2, c/2]$ dla funkcji f.

- $D[a, b]$ - zbiór funkcji càdlàg na odcinku $[a, b]$
- $BV^+[a, b]$ - zbiór funkcji càdlàg , niemalejących na odcinku $[a, b]$
- $BV[a, b]$ - zbiór funkcji càdlàg o wahaniu skończonym na odcinku $[a, b]$, przedziałami monotonicznych

Problem Skorohoda na $[-c/2, c/2]$ - definicja, istnienie

Definicja

Niech $c > 0$ oraz $x \in \mathbb{R}$.
Para funkcji $(\phi^{x,c}, \xi^{x,c}) \in D[a,b] \times BV[a,b]$ jest rozwiązaniem problemu Skorohoda na $[-c/2, c/2]$ z warunkiem początkowym $\xi^{x,c}(a) = u(a) - x$ dla u jeżeli zachodzą następujące warunki:

(a) *dla dowolnego $t \in [a,b]$, $\phi^{x,c}(t) = u(t) - \xi^{x,c}(t) \in [-c/2, c/2]$;*

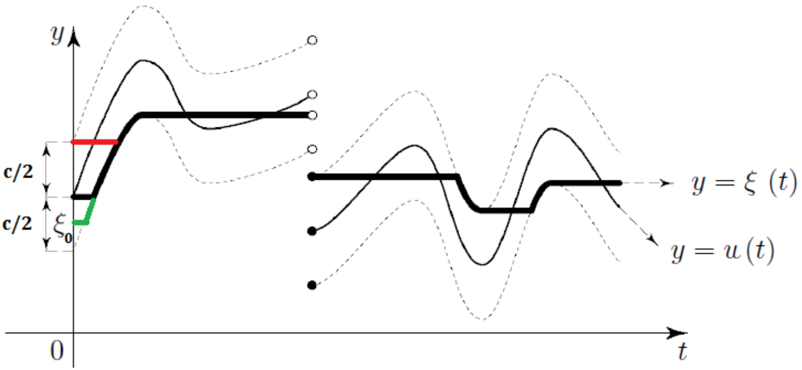
(b) *$\xi^{x,c} = \xi_u^{x,c} - \xi_d^{x,c}$, gdzie $\xi_u^{x,c}, \xi_d^{x,c} \in BV^+[a,b]$ i odpowiadające miary $\mathrm{d}\xi_u^{x,c}$, $\mathrm{d}\xi_d^{x,c}$ mają nośniki $\{t \in [a,b] : \phi^{x,c}(t) = c/2\}$ i $\{t \in [a,b] : \phi^{x,c}(t) = -c/2\}$ odpowiednio;*

(c) *$\xi^{x,c}(a) = u(a) - x$.*

Twierdzenie

Jeżeli $u : [a,b] \to \mathbb{R}$, $c > 0$ oraz $x \in [-c/2, c/2]$ wówczas istnieje dokładnie jedno rozwiązanie problemu Skorohoda dla u na $[-c/2, c/2]$.

Problem Skorohoda na $[-c/2, c/2]$ ilustracja



Source: Pavel Krejˇc'ı, *Long-time behaviour of solutions to hyperbolic equations with hysteresis*, WIAS, Berlin,

Własności rozwiązania problemu Skorohoda na $[-c/2, c/2]$.

Jeżeli $(\phi^{x,c}, f^{x,c})$ jest rozwiązaniem problemu Skorohoda na $[-c/2, c/2]$ dla f, z warunkiem początkowym $f^{x,c}(a) = f(a) - x$, $x \in [-c/2, c/2]$, to dla dowolnego $t \in [a, b]$,

$$|f^{x,c}(t) - f(t)| \leqslant c/2 \text{ oraz } \Delta f^{x,c}(t) \leqslant \Delta f(t).$$

Okazuje się także, że (dodatnie, ujemne) wahanie całkowite rozwiązania problemu Skorohoda, $f^{x,c}$, jest prawie równe uciętemu wahaniu (w górę, w dół) funkcji f.

Dokładniej, dla dowolnego $x \in [-c/2, c/2]$ zachodzą oszacownia

$$\mathrm{UTV}^c(f, [a, b]) \leqslant \mathrm{UTV}^0(f^{x,c}, [a, b]) \leqslant \mathrm{UTV}^c(f, [a, b]) + c,$$

$$\mathrm{DTV}^c(f, [a, b]) \leqslant \mathrm{DTV}^0(f^{x,c}, [a, b]) \leqslant \mathrm{DTV}^c(f, [a, b]) + c$$

a stąd również

$$\mathrm{TV}^c(f, [a, b]) \leqslant \mathrm{TV}^0(f^{x,c}, [a, b]) \leqslant \mathrm{TV}^c(f, [a, b]) + 2c.$$

Problem Skorohoda na $[-c/2, c/2]$ a liczby przecięć (przeskoków) przedziałów, c.d.

Twierdzenie (1)

Niech $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *będzie funkcją càdlàg* , $c > 0$, $x \in [-c/2, c/2]$ *oraz* $(\phi^{x,c}, f^{x,c})$ *będzie rozwiązaniem problemu Skorohoda na* $[-c/2, c/2]$ *dla* f, *z warunkiem początkowym* $f^{x,c}(a) = f(a) - x$. *Wówczas dla wszystkich* $y \in \mathbb{R} \setminus A$, *gdzie* A *jest co najwyżej przeliczalny, zachodzą oszacowania*

$$u_c^y(f, [a, b]) \leqslant u_0^{y+c/2}(f^{x,c}, [a, b]) \leqslant u_c^y(f, [a, b]) + 1,$$

$$d_c^y(f, [a, b]) \leqslant d_0^{y+c/2}(f^{x,c}, [a, b]) \leqslant d_c^y(f, [a, b]) + 1.$$

Co więcej,

$$u_c^y(f, [a, b]) = u_0^{y+c/2}\left(f^{-c/2,c}, [a, b]\right),$$

$$d_c^y(f, [a, b]) = d_0^{y+c/2}\left(f^{c/2,c}, [a, b]\right).$$

Formuły na $\int_{y\in\mathbb{R}} u_0^y\left(f^{x,c},[a,b]\right) m(y)\mathrm{d}y$, $\int_{y\in\mathbb{R}} d_0^y\left(f^{x,c},[a,b]\right) m(y)\mathrm{d}y$

Korzystając z faktu, że $f^{x,c}$ jest przedziałami monotoniczna, dla mierzalnej i ograniczonej funkcji m łatwo udowodnić następujące formuły:

$$\int_{\mathbb{R}} u_0^y\left(f^{x,c},[a,b]\right) m(y)\mathrm{d}y = \int_a^b m\left(f^{x,c}(t)\right)\mathrm{dUTV}(f^{x,c},[a,t]) + \sum_{a<t\leqslant b, \Delta f^{x,c}(t)>0} \int_{[f^{x,c}(t-), f^{x,c}(t)]} m(y) - m\left(f^{x,c}(t-)\right)\mathrm{d}y \tag{3}$$

oraz

$$\int_{\mathbb{R}} d_0^y\left(f^{x,c},[a,b]\right) m(y)\mathrm{d}y = \int_a^b m\left(f^{x,c}(t)\right)\mathrm{dDTV}(f^{x,c},[a,t]) + \sum_{a<t\leqslant b, \Delta f^{x,c}(t)<0} \int_{[f^{x,c}(t-), f^{x,c}(t)]} m(y) - m\left(f^{x,c}(t-)\right)\mathrm{d}y. \tag{4}$$

Formuły na $\int_{\mathbb{R}} u_c^y(f,[a,b])\, m(y)\mathrm{d}y$, $\int_{\mathbb{R}} d_c^y(f,[a,b])\, m(y)\mathrm{d}y$

Łącząc formuły (3) i (4) z Twierdzeniem (1) otrzymujemy

$$\int_{\mathbb{R}} u_c^y(f,[a,b])\, m(y)\mathrm{d}y = \int_a^b m\left(f^{-c/2,c}(t)\right) \mathrm{dUTV}\left(f^{-c/2,c},[a,t]\right) + \sum_{a<t\leqslant b, \Delta f^{-c/2,c}(t)>0} \int_{[f^{-c/2,c}(t-), f^{-c/2,c}(t)]} m(y) - m\left(f^{-c/2,c}(t-)\right) \mathrm{d}y \tag{5}$$

oraz

$$\int_{\mathbb{R}} d_c^y(f,[a,b])\, m(y)\mathrm{d}y = \int_a^b m\left(f^{c/2,c}(t)\right) \mathrm{dDTV}\left(f^{c/2,c},[a,t]\right) + \sum_{a<t\leqslant b, \Delta f^{c/2,c}(t)<0} \int_{[f^{c/2,c}(t-), f^{c/2,c}(t)]} m(y) - m\left(f^{c/2,c}(t-)\right) \mathrm{d}y. \tag{6}$$

Przecięcia poziomów a gęstość przebywania

Korzystając z (5) i (6) dostaje się następujące twierdzenie.

Twierdzenie (M1)

Załóżmy, że $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *jest funkcją càdlàg oraz istnieje taka niemalejąca funkcja* $\varphi : (0; +\infty) \to (0; +\infty)$, *że* $\lim_{c \to 0+} \varphi(c) = 0$ *i taka funkcja* $\zeta : [a, b] \to \mathbb{R}$, *że dla* $t \in [a, b]$ *zachodzi zbieżność*

$$\lim_{c \to 0+} \varphi(c)\, TV^c(f, [a, t]) = \zeta(t)$$

(lub równoważnie $\lim_{c \to 0+} \varphi(c)\, UTV^c(f, [a, t]) = \frac{1}{2}\zeta(t)$ *lub* $\lim_{c \to 0+} \varphi(c)\, DTV^c(f, [a, t]) = \frac{1}{2}\zeta(t)$*).*
Wówczas ζ *jest niemalejącą funkcją ciągłą i dla dowolnej ciągłej* $m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *zachodzi*

$$\lim_{c \to 0+} \varphi(c) \int_{\mathbb{R}} n_c^y(f, [a, t]) m(y)\, \mathrm{d}y = \int_a^t m(f(s))\, \mathrm{d}\zeta_s.$$

Przecięcia poziomów a gęstość przebywania, c.d.

Niech $T > 0$ i $f : [0, T] \to \mathbb{R}$. Równość

$$\lim_{c \to 0+} \int_{\mathbb{R}} \varphi(c)\, n_c^y(f, [0, t]) m(y)\, \mathrm{d}y = \int_0^t m(f(s))\, \mathrm{d}\zeta_s.$$

prawdziwa dla dowolnej funkcji ciągłej m sugeruje, że istnieje granica

$$L_t^y(f) := \lim_{c \to 0+} \varphi(c)\, n_c^y(f, [0, t]),$$

którą możemy interpretować jako "gęstość przebywania" funkcji f na poziomie y do momentu t względem miary ζ :

$$\int_{\mathbb{R}} L_t^y(f) m(y)\, \mathrm{d}y = \int_0^t m(f(s))\, \mathrm{d}\zeta_s.$$

Przecięcia poziomów a czasy lokalne

Okazuje się, że są procesy X_t, $t \geqslant 0$, dla których czas lokalny można rzeczywiście zdefiniować jako granicę (w normie L^p dla $p \geqslant 1$)

$$\lim_{c \to 0+} \varphi(c)\, n_c^y(X, [0, t])$$

dla odpowiednio dobranej funkcji φ.
Nie jest to jednak regułą. Podam przykład procesu α-stabilnego, dla którego co prawda istnieje (słaba) granica w topologii zbieżności jednostajnej na zbiorach zwartych

$$\lim_{c \to 0+} \varphi(c)\, \mathrm{TV}^c(X, [0, t]) = t$$

ale ich czasu lokalnego nie można zdefiniować jako $\lim_{c \to 0+} \varphi(c)\, n_c^y(X, [0, t])$.

Gęstość przebywania jako czas lokalny procesu Markowa

Załóżmy teraz, że X_t, $t \in [0, T]$, jest (jednorodnym) procesem Markowa z przestrzenią stanów $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, gdzie $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ jest $\sigma-$ciałem zbiorów borelowskich. Dla dowolnego $t > 0$ i $\omega \in \Omega$ definiujemy miarę przebywania $X(\omega)$ w zbiorze $\Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ do momentu t :

$$\mu_t(\Gamma) := \lambda(s \in [0, t] : X_s(\omega) \in \Gamma),$$

gdzie λ jest miarą Lebesgue'a na półprostej $[0, +\infty)$.

Definicja

Powiemy, że proces X ma **czas lokalny** *względem $\sigma-$skończonej miary π na $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ jeżeli miara μ_T jest absolutnie ciągła względem π, $\mathbb{P}^x-$prawie na pewno dla każdego $x \in \mathbb{R}$. W szczególności oznacza to, że dla $t \in [0, T]$ i dla dowolnej funkcji ciągłej $m : E \to \mathbb{R}$ zachodzi*

$$\int_0^t m(X_s)\,\mathrm{d}s = \int_{\mathbb{R}} m(y)\mathrm{d}\mu_t(y) = \int_{\mathbb{R}} m(y)\frac{\mathrm{d}\mu_t(y)}{\mathrm{d}\pi(y)}\mathrm{d}\pi(y).$$

Czas lokalny procesu Markowa

Jeżeli założenia definicji istnienia czasu lokalnego są spełnione, to ten czas lokalny w momencie t jest wówczas równy gęstości Radona-Nikodyma miary μ_t względem miary π :

$$L_t^y(X) := \frac{\mathrm{d}\mu_t(y)}{\mathrm{d}\pi(y)}.$$

Inna definicja czasu lokalnego procesu Markova pochodzi od Blumenthala i Getoora. Niech T_x będzie czasem dotarcia do zbioru $\{x\}$ oraz E_r będzie zbiorem punków regularnych procesu X czyli takich, dla których zachodzi

$$\mathbb{P}^x(T_x = 0) = 1.$$

Zakładając, że odwzorowanie $(x, y) \mapsto \mathbb{E}^x e^{-T_y}$ jest $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$ mierzalne, dla $y \in E_r$ czas lokalny L_t^y jest jednoznacznie wyznaczonym funkcjonałem addytywnym $t \mapsto L_t^y$, dla którego zachodzi

$$\mathbb{E}^x e^{-T_y} = \mathbb{E}^x \int_0^{+\infty} e^{-t} \mathrm{d}L_t^y.$$

Czas lokalny semimartyngału

Idea czasów lokalnych dla semimartyngałów pojawia się w nieco inny sposób - na gruncie teorii całki stochastycznej. Dla dowolnego (rzeczywistego) semimartyngału X dowodzi się, że dla każdego $y \in \mathbb{R}$ istnieje taki addytywny, nieujemny, niemalejący i ciągły proces $L_t^y(X)$, $t \geqslant 0$, że dla dowolnej funkcji wypukłej $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zachodzi formuła Meyera-Itô:

$$g(X_t) - g(X_0) = \int_{0+}^{t} g'(X_{s-})\,\mathrm{d}X_s + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} L_t^y(X)\,\mathrm{d}\mu(y) + \sum_{0<s\leqslant t}\left\{g(X_s) - g(X_{s-}) - g'(X_{s-})\,\Delta X_s\right\},$$

gdzie g' is pochodną prawostronną zaś μ jest uogólnioną pochodną g drugiego rzędu ($g(x) = a + bx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} |x-y|\mathrm{d}\mu(y)$).

Czas lokalny semimartyngału, c. d.

Ważną konsekwencją formuły Meyera-Itô jest formuła

$$\int_0^t m\left(X_s\right) \mathrm{d}\left[X, X\right]_s^{cont} = \int_{\mathbb{R}} m(y) L_t^y\left(X\right) \mathrm{d}y,$$

gdzie $[X, X]_s^{cont}$ oznacza ciągłą część wahania kwadratowego X a $m\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest dowolną funkcją mierzalną i ograniczoną.
Porównując powyższą równość z formułą

$$\int_0^t m\left(f\left(s\right)\right) \mathrm{d}\zeta_s = \int_{\mathbb{R}} m\left(y\right) L_t^y\left(f\right) \mathrm{d}y$$

i definicją $\zeta_s = \lim_{c\to 0+} \varphi(c) \mathrm{TV}^c(f, [0, s])$ nasuwa się pytanie, czy dla pewnej funkcji φ spełniającej $\lim_{c\to 0+} \varphi(c) = 0$ i dla prawie każdej ścieżki $X\left(\omega\right)$ semimartyngału X zachodzi

$$\lim_{c\to 0+} \varphi(c) \mathrm{TV}^c(f, [0, s]) = [X, X]_s^{cont}?$$

Czas lokalny semimartyngału, c. d.

Okazuje się, że rzeczywiście, dla dowolnego rzeczywistego semimartyngału X_s, $s \geqslant 0$, z prawdopodobieństwem 1 zachodzi

$$\lim_{c \to 0+} c \cdot \mathrm{TV}^c(X, [0, s]) = [X, X]_s^{cont}.$$

Co więcej, wynik Nicole El Karoui z 1978 r. mówi, że jeżeli $X = M + V$ (M - martyngał lokalny, V - proces o wahaniu skończonym) jest ciągłym semimartyngałem, dla którego $\mathbb{E}\left[[X, X]_T^{cont} + \mathrm{TV}(V, [0, T])\right]^p < +\infty$, $p \geqslant 1$, $T > 0$, to

$$\lim_{c \to 0+} \mathbb{E} \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \left| c \cdot n_c^y(X, [0, t]) - L_t^y(X) \right|^p = 0.$$

Uwaga

Jeżeli zbieżność w L^p zastąpi się poprzez zbieżność wg prawdopodobieństwa, to analogiczny wynik zachodzi dla dowolnych ciągłych semimartyngałów. **Hipoteza***: analogiczna równość zachodzi dla dowolnych (niekoniecznie ciągłych) semimartyngałów.*

Czas lokalny semimartyngału a czas lokalny procesu Lévy'ego

Wnioskiem ze zbieżności

$$\lim_{c\to 0+} c \cdot \mathrm{TV}^c(X,[0,s]) = [X,X]_s^{cont}\,. \tag{7}$$

jest fakt, że część ciągła semimartyngału X "dominuje" przecięcia/przeskoki małych przedziałów przez X.

Z formuły Meyera-Itô wynika również, że czysto nieciągłe semimartyngały mają czas lokalny (występujący w formule Meyera-Itô) $\equiv 0$.
Co zatem z czasami lokalnymi procesów Lévy'ego bez składnika brownowskiego, które są czysto nieciągłymi semimartyngałami? Każdy proces Lévy'ego jest również procesem Markowa, można więc dla niego zdefiniować czas lokalny tak jak dla procesów Markowa.
Z (7) wynika, że wówczas odpowiednia funkcja normalizująca φ, dla której $\lim_{c\to 0+}\varphi(c)n_c^y(X,[0,t]) = L_t^y(X)$ (o ile w jakimś sensie ta granica istnieje) będzie zbiegała do 0 dla $c \to 0+$ wolniej niż c.

Rodzaje zbieżności

Niech Y_t, $t \geqslant 0$ będzie procesem càdlàg zdefiniowanym na przestrzeni z filtracją $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_t, t \geqslant 0), \mathbb{P})$, dla której zachodzą zwykłe warunki (usual conditions) oraz niech Y^c, $c > 0$, będzie rodziną procesów càdlàg Y_t^c, $t \geqslant 0$, zdefiniowaną na tej samej przestrzeni.

- '$Y^c \to Y$' będzie oznaczać **zbieżność prawie pewną** Y^c do Y gdy $c \to 0+$ **w topologii zbieżności jednostajnej** na zbiorach zwartych
- '$Y^c \Rightarrow Y$' będzie oznaczać **słabą zbieżność (funkcyjną)** Y^c do Y gdy $c \to 0+$ **w topologii zbieżności jednostajnej** na zbiorach zwartych
- '$Y^c \Longrightarrow Y$' będzie oznaczać **słabą zbieżność (funkcyjną)** Y^c do Y gdy $c \to 0+$ **w topologii J Skorohoda** na zbiorach zwartych

Id będzie oznaczać proces deterministyczny $Id(t) = t$ dla $t \geqslant 0$.

Funkcja φ dla procesu Lévy'ego

Twierdzenie (LPU)

Niech $X_t, t \geqslant 0$, będzie procesem Lévy'ego, o nieskończonym wahaniu na dowolnym niezdegenerowanym przedziale. Zdefiniujmy

- $T_D^c X := \inf\left\{t \geqslant 0 : \sup_{0 \leqslant s \leqslant t} X_s - X_t > c\right\}, \quad \theta_U^c := \mathbb{E} T_D^c X$
- $\xi_U^c := \sup_{0 \leqslant s < t < T_D^c X} (X_t - X_s - c)_+, \quad \eta_U^c := \mathbb{E}\xi_U^c.$

Funkcja φ dla procesu Lévy'ego

Twierdzenie (LPU)

Niech $X_t, t \geqslant 0$, będzie procesem Lévy'ego, o nieskończonym wahaniu na dowolnym niezdegenerowanym przedziale. Zdefiniujmy

- $T_D^c X := \inf \left\{ t \geqslant 0 : \sup_{0 \leqslant s \leqslant t} X_s - X_t > c \right\}, \quad \theta_U^c := \mathbb{E} T_D^c X$
- $\xi_U^c := \sup_{0 \leqslant s < t < T_D^c X} \left(X_t - X_s - c \right)_+, \quad \eta_U^c := \mathbb{E} \xi_U^c.$

Załóżmy, że $\mathbb{E} \sup_{0 \leqslant t < T_D^{c_0} X} X_t < +\infty$ *dla pewnego* $c_0 > 0$. *Jeżeli*

$$\chi_U(c) := \theta_U^c / \eta_U^c$$

i dla dowolnego $u > 0$, $\mathbb{P}\left(\xi_U^c \leqslant u / \chi_U(c) \right) / \theta_U^c \to 1$ *gdy* $c \to 0+$, *wówczas zachodzi następująca zbieżność*

$$\chi_U(c)\, TV^c(X, \cdot) \Rightarrow 2 \cdot Id.$$

Funkcja φ dla procesu Lévy'ego, c.d.

Twierdzenie (LPD)

Niech $X_t, t \geqslant 0$, będzie procesem Lévy'ego, o nieskończonym wahaniu na dowolnym niezdegenerowanym przedziale. Zdefiniujmy

- $T_U^c X := \inf \{ t \geqslant 0 : X_t - \inf_{0 \leqslant s \leqslant t} X_s > c \}, \quad \theta_D^c := \mathbb{E} T_U^c X$
- $\xi_D^c := \sup_{0 \leqslant s < t < T_U^c X} (X_s - X_t - c)_+, \quad \eta_D^c := \mathbb{E} \xi_D^c.$

Funkcja φ dla procesu Lévy'ego, c.d.

Twierdzenie (LPD)

Niech $X_t, t \geqslant 0$, będzie procesem Lévy'ego, o nieskończonym wahaniu na dowolnym niezdegenerowanym przedziale. Zdefiniujmy

- $T_U^c X := \inf\left\{t \geqslant 0 : X_t - \inf_{0 \leqslant s \leqslant t} X_s > c\right\}, \quad \theta_D^c := \mathbb{E} T_U^c X$
- $\xi_D^c := \sup_{0 \leqslant s < t < T_U^c X} \left(X_s - X_t - c\right)_+, \quad \eta_D^c := \mathbb{E}\xi_D^c.$

Załóżmy, że $\mathbb{E} \sup_{0 \leqslant t < T_U^{c_0} X} X_t < +\infty$ *dla pewnego* $c_0 > 0$. *Jeżeli*

$$\chi_D(c) := \theta_D^c / \eta_D^c$$

i dla dowolnego $u > 0$, $\mathbb{P}\left(\xi_D^c \leqslant u/\chi_D(c)\right)/\theta_D^c \to 1$ *gdy* $c \to 0+$, *wówczas zachodzi następująca zbieżność*

$$\chi_D(c)\, TV^c(X, \cdot) \Rightarrow 2 \cdot Id.$$

Przykład - spektralnie ujemny proces z prawie α-stabilnymi skokami, $\alpha \in (1,2)$

Twierdzenie

Niech X_t, $t \geqslant 0$, *będzie procesem Lévy'ego bez składnika brownowskiego, z miarą Léviego* Π

$$\Pi(\mathrm{d}x) = \frac{L(-x)}{(-x)^{1+\alpha}} 1_{x<0} \mathrm{d}x$$

dla $\alpha \in (1;2)$ *i pewnej funkcji borelowskiej* $L : (0,+\infty) \to (0,+\infty)$, *wolno zmieniającej się w* 0. *Wówczas* $\chi_D(c) \sim \frac{\alpha(\alpha-1)}{\Gamma(2-\alpha)} \frac{c^{\alpha-1}}{L(c)}$, *tzn.*

$$\lim_{c \to 0+} \frac{\chi_D(c)}{\frac{\alpha(\alpha-1)}{\Gamma(2-\alpha)} \frac{c^{\alpha-1}}{L(c)}} = 1$$

oraz

$$\frac{\alpha(\alpha-1)}{\Gamma(2-\alpha)} \frac{c^{\alpha-1}}{L(c)} TV^c(X,\cdot) \Rightarrow 2 \cdot Id.$$

Zbieżność II rzędu dla procesów ściśle α-stabilnych, $\alpha \in (1,2)$

Niech X_t, $t \geqslant 0$, będzie procesem ściśle α-stabilnym z wykładnikiem charakterystycznym

$$\Psi_X(\theta) = C_0 |\theta|^\alpha \left(1 - i\gamma \operatorname{tg} \frac{\pi\alpha}{2} \operatorname{sgn}\theta\right), \tag{8}$$

gdzie $\alpha \in (1;2)$ jest indeksem, $C_0 > 0$ jest parametrem skali oraz $\gamma \in [-1;1]$ jest parametrem skośności. Zdefiniujmy

$$A := \lim_{N \to +\infty} \mathbb{E}\left(\mathrm{TV}^1(X,[0;N+1]) - \mathrm{TV}^1(X,[0;N])\right).$$

(mozna udowodnić, że ta granica istnieje) oraz

$$T_t^{c,\alpha} := \mathrm{TV}^c(X,[0,t]) - c^{1-\alpha} A \cdot t.$$

Zbieżność II rzędu dla procesów ściśle α-stabilnych, $\alpha \in (1, 2)$, c.d.

Twierdzenie (SecondOrder)

Niech $\alpha \in (1; 2)$ oraz X_t, $t \geqslant 0$, będzie ściśle α-stabilnym procesem z wykładnikiem charakterystycznym danym za pomocą (8). Wówczas

$$T^{c,\alpha} \Longrightarrow L^1 + L^2,$$

gdzie L^1 i L^2 są dwoma niezależnymi, spektralnie dodatnimi procesami takimi, że $X = L^1 - L^2$ oraz $L^1 + L^2$ jest ściśle α-stabilnym, spektralnie dodatnim procesem z wykładnikiem charakterystycznym danym za pomocą

$$\Psi_{L^1+L^2}(\theta) = C_0|\theta|^\alpha \left(1 - i\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi\alpha}{2} sgn\theta\right).$$

Zbieżność II rzędu dla procesów ściśle 1-stabilnych

Niech $X_t,\ t \geqslant 0$, będzie ściśle 1-stabilnym procesem z wykładnikiem charakterystycznym

$$\Psi_X(\theta) = C_0|\theta| + i\eta\theta, \tag{9}$$

z parametrem skali $C_0 > 0$ i dryfem $\eta \in \mathbb{R}$. (Wykładnik charakterystyczny procesu ściśle 1-stabilnego musi być takiej postaci.) Połóżmy

$$B = \lim_{N\to+\infty} \mathbb{E}\left(\mathrm{TV}^1(X,[0;N+1]) - \mathrm{TV}^1(X,[0;N]) - \mathrm{TV}(Y,[0;N])\right),$$

gdzie $Y = \sum_{N<s\leqslant N+1} |X_s - X_{s-}|\, 1_{|X_s - X_{s-}|\geqslant 1}$ oraz

$$T_t^{c,1} := \mathrm{TV}^c(X,[0,t]) - \frac{2}{\pi} C_0 \ln c^{-1} \cdot t - B \cdot t.$$

Zbieżność II rzędu dla procesów ściśle 1-stabilnych, c.d.

Twierdzenie (SecondOrder1)

Niech X_t, $t \geqslant 0$, *będzie ściśle* 1*-stabilnym procesem z wykładnikiem charakterystycznym danym za pomocą (9), wówczas*

$$T^{c,1} \Longrightarrow M^1 + M^2,$$

gdzie M^1, M^2 *są dwoma niezależnymi, spektralnie dodatnimi procesami takimi, że* $X = M^1 - M^2$ *oraz* $M^1 + M^2$ *jest procesem* 1*-stabilnym z wykładnikiem charakterystycznym danym za pomocą*

$$\Psi_{M^1+M^2}(\theta) = C_0|\theta| \left(1 + i\frac{2}{\pi} sgn\,(\theta) \log|\theta|\right) - i\frac{2\,(1-\mathbb{C})}{\pi} C_0\theta,$$

gdzie $\mathbb{C} = \Gamma'(1) \approx 0.577$ *jest stałą Eulera-Mascheroniego.*

Funkcja φ dla procesów ściśle α-stabilnych, $\alpha \in (1, 2)$

Z Twierdzenia (SecondOrder) wynika, że dla ściśle α-stabilnego procesu X z $\alpha \in (1, 2)$

$$A^{-1} \cdot c^{\alpha-1} TV^{c}(X, [0, \cdot]) \Rightarrow Id. \tag{10}$$

Zatem można wziąć $\varphi = c^{\alpha-1}/A$. Wiadomo, że dla $\alpha \in (1, 2)$ czas lokalny względem procesu α-stabilnego istnieje. Ogólniej, zachodzi następujące

Twierdzenie (LTE)

Niech X_t, $t \geqslant 0$, będzie procesem Lévy'ego z wykładnikiem charakterystycznym Ψ. Następujące warunki są równoważne

(i)
$$\int_{\mathbb{R}} Re\left(\frac{1}{1+\Psi(s)}\right) \mathrm{d}s < +\infty;$$

(ii) *Dla każdego $t > 0$, X posiada czas lokalny $L_t^y(X) \in L^2(\mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}\mathbb{P})$ względem miary Lebesgue'a.*

Co więcej, jeżeli warunek (ii) jest niespełniony, to X nie posiada czasu lokalnego względem miary Lebesgue'a.

Hipoteza dla procesów ściśle α-stabilnych, $\alpha \in (1,2)$

Z istnienia czasu lokalnego $L_t^y(X)$ i ze zbieżności (10) wynika, że dla dowolnej funkcji ciągłej (a stąd i borelowskiej, ograniczonej) m

$$\lim_{c\to 0+} \int_{\mathbb{R}} \left[A^{-1} c^{\alpha-1} n_c^y (X, [0,\cdot]) - L^y(X) \right] m(y) \mathrm{d}y \Rightarrow 0.$$

Hipoteza: jeżeli X_t, $t \geqslant 0$, jest procesem ściśle α-stabilnym z $\alpha \in (1,2)$, to

$$A^{-1} c^{\alpha-1} n_c^y (X, [0,\cdot]) \Rightarrow L^y(X).$$

Uwaga

Z faktu, że dla dowolnej borelowskiej i ograniczonej funkcji $m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *zachodzi* $\lim_{c\to 0+} \int_{\mathbb{R}} r_c(y) m(y) \mathrm{d}y = 0$ *nie wynika, że istnieje prawie wszędzie granica* $\lim_{c\to 0+} r_c(y)$. *Przykład:* $r_c(y) = \phi_{\lfloor 1/c \rfloor}(y) 1_{[0,1]}(y)$, *gdzie* $\{\phi_n\}$*- np. baza ortonormalna na* $[0,1]$.

Odrzucenie hipotezy dla procesów 1-stabilnych

Z Twierdzenia (SecondOrder1), że dla procesu ściśle 1-stabilnego

$$\left(\frac{2}{\pi} C_0 \ln c^{-1}\right)^{-1} \mathrm{TV}^c(X, [0, \cdot]) \Rightarrow Id.$$

zatem odpowiednia funkcja normalizująca ma postać
$\phi(c) = \left(\frac{2}{\pi} C_0 \ln c^{-1}\right)^{-1}$.
Z Twierdzenia (LTE) wynika jednak, że w tym przypadku nie istnieje czas lokalny względem miary Lebesgue'a, zatem proces

$$\left(\frac{2}{\pi} C_0 \ln c^{-1}\right)^{-1} n_c^y (X, [0, \cdot])$$

nie może być zbieżny do czasu lokalnego względem miary Lebesgue'a.

Dziękuję za uwagę!