Nieregularne ścieżki - między determinizmem a losowością

Rafał Łochowski

SGH

6. Forum Matematyków

Problem z nieskończonym wahaniem semimartyngałów i definicją całki stochastycznej

Od lat 40. XX wieku wiadomo [2], że trajektorie standardowego ruchu Browna B_t, $t \geqslant 0$, p.n. mają wahanie nieskończone, i np. całki postaci

$$\int_0^T B_t \mathrm{d} B_t$$

nie da się zdefiniować jako klasycznej całki Riemanna-Stieltjesa, całki Younga czy całki Lebesgue'a-Stieltjesa.

Problem z nieskończonym wahaniem semimartyngałów i definicją całki stochastycznej

Od lat 40. XX wieku wiadomo [2], że trajektorie standardowego ruchu Browna B_t, $t \geqslant 0$, p.n. mają wahanie nieskończone, i np. całki postaci

$$\int_0^T B_t \mathrm{d} B_t$$

nie da się zdefiniować jako klasycznej całki Riemanna-Stieltjesa, całki Younga czy całki Lebesgue'a-Stieltjesa.

Systematycznie rozwijana od tego czasu ogólna teoria całki stochastycznej doprowadziła do powstania pojęcia semimartyngału i jego wahania kwadratowego.

Przepis na ogólną całkę stochastyczną $\int_0^T Y_- \mathrm{d}X$

Składniki:

- Przestrzeń probabilistyczna z filtracją $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$, najlepiej spełniająca *typowe założenia*, czyli
  - filtracja $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t \geqslant 0}$ jest prawostronnie ciągła, czyli dla $t \geqslant 0$, $\mathcal{F}_t = \bigcap_{u>t} \mathcal{F}_u$.
  - $\mathcal{F}_0$ zawiera wszystkie zbiory z $\mathcal{F}$ o prawdopodobieństwie 0.
- Proces całkujący X o wartościach w $\mathbb{R}^d$, który jest semimartyngałem (względem filtracji $\mathbb{F}$).
- Adaptowany (względem $\mathbb{F}$) proces całkowany Y o wartościach w $\mathbb{R}^d$, p.n. o trajektoriach càdlàg .

Przepis na ogólną całkę stochastyczną $\int_0^T Y_- \mathrm{d}X$

Składniki:

- Przestrzeń probabilistyczna z filtracją $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$, najlepiej spełniająca *typowe założenia*, czyli
  - filtracja $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t \geqslant 0}$ jest prawostronnie ciągła, czyli dla $t \geqslant 0$, $\mathcal{F}_t = \bigcap_{u>t} \mathcal{F}_u$.
  - $\mathcal{F}_0$ zawiera wszystkie zbiory z $\mathcal{F}$ o prawdopodobieństwie 0.
- Proces całkujący X o wartościach w $\mathbb{R}^d$, który jest semimartyngałem (względem filtracji $\mathbb{F}$).
- Adaptowany (względem $\mathbb{F}$) proces całkowany Y o wartościach w $\mathbb{R}^d$, p.n. o trajektoriach càdlàg .

Narzędzia:

- wahanie kwadratowe $[X]$ (albo, jeszcze lepiej - prognozowalna (lewostronna) wersja wahania kwadratowego, $\langle X \rangle$)
- izomorfizm Itô lub twierdzenie o reprezentacji ciągłych funkcjonałów liniowych na przestrzeni Hilberta

Inne podejścia, wahanie kwadratowe

Możliwe jest też "odwrotne" podejście (np. takie jak u Prottera [5]), gdzie definiuje się całkę i jej "minimalne" pożądane własności dla prostych procesów całkowanych, a następnie dowodzi się, że najszersza klasa "dobrych" procesów całkujących, dla których te własności zachodzą, to klasa semimartyngałów (twierdzenie Dellacherie-Bichtelera).

Inne podejścia, wahanie kwadratowe

Możliwe jest też "odwrotne" podejście (np. takie jak u Prottera [5]), gdzie definiuje się całkę i jej "minimalne" pożądane własności dla prostych procesów całkowanych, a następnie dowodzi się, że najszersza klasa "dobrych" procesów całkujących, dla których te własności zachodzą, to klasa semimartyngałów (twierdzenie Dellacherie-Bichtelera).

Niezależnie od zastosowanego podejścia, dla dowolnego $T \geqslant 0$, wahanie kwadratowe $[X]_T$ semimartyngału X_t, $t \geqslant 0$, jest zawsze równe granicy (wg prawdopodobieństwa) zmiennych losowych postaci

$$[X]_T = \lim_{n\to\infty}^{(P)} X_0^2 + \sum_{i=1}^{N_n} \left(X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n} \right)^2 ,$$

gdzie $0 = t_0^n < t_1^n < \ldots < t_{N_n}^n = T$ jest dowolnym ciągiem podziałów odcinka $[0, T]$, o średnicy $\max_{1 \leqslant i \leqslant N_n} \left(t_i^n - t_{i-1}^n \right)$ dążącej do 0 gdy n dąży do $+\infty$.

Uogólniony wzór Itô

Gdy się ma już wszystkie narzędzia i składniki, definiujemy całkę stochastyczną. Jeżeli $f:\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ jest funkcją klasy C^2, to zachodzi następujące uogólnienie wzoru Itô (wzór Kunity-Watanabe):

$$
\begin{aligned}
f(X_t) = f(X_0) &+ \sum_{i=1}^{d} \int_{0+}^{t} \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_{s-})\,\mathrm{d}X_s^i \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} \int_{0+}^{t} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X_{s-})\,\mathrm{d}\left[X^i, X^j\right]_s^c \\
&+ \sum_{0<s\leqslant t} \left\{ \Delta f(X_s) - \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_{s-})\,\Delta X_s^i \right\},
\end{aligned}
$$

Uogólniony wzór Itô

Gdy się ma już wszystkie narzędzia i składniki, definiujemy całkę stochastyczną. Jeżeli $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ jest funkcją klasy C^2, to zachodzi następujące uogólnienie wzoru Itô (wzór Kunity-Watanabe):

$$
\begin{aligned}
f(X_t) = f(X_0) &+ \sum_{i=1}^{d}\int_{0+}^{t}\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_{s-})\,\mathrm{d}X_s^i \\
&+ \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d}\int_{0+}^{t}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(X_{s-})\,\mathrm{d}\left[X^i,X^j\right]_s^c \\
&+ \sum_{0<s\leqslant t}\left\{\Delta f(X_s)-\sum_{i=1}^{d}\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_{s-})\,\Delta X_s^i\right\},
\end{aligned}
$$

gdzie

$$\left[X^i,X^j\right]=\frac{1}{4}\left(\left[X^i+X^j\right]-\left[X^i-X^j\right]\right)$$

zaś $\left[X^i,X^j\right]^c$ jest częścią ciągłą $\left[X^i,X^j\right]$.

Czy do wyprowadzenia wzoru Itô potrzebna jest konstrukcja całki stochastycznej?

Okazuje się, że do wyprowadzenia wzoru Itô, niekoniecznie potrzebna jest konstrukcja całki stochastycznej.

W pionierskiej pracy [1] z 1981 roku Föllmer wprowadził pojęcie wahania kwadratowego funkcji càdlàg $x : [0, T] \to \mathbb{R}$ względem pewnego ciągu (π_n) podziałów odcinka $[0, T]$, $\pi_n = \left\{0 = t_0^n < t_1^n < \ldots < t_{N_n}^n = T\right\}$ o średnicy $\max_{1 \leqslant i \leqslant N_n} \left(t_i^n - t_{i-1}^n\right)$ dążącej do 0 gdy n dąży do $+\infty$.

Konstrukcja Föllmera

Definicja

Niech x i (π_n) będą jak wyżej. Załóżmy, że ciąg miar

$$\sum_{i=1}^{N_n} \left(x_{t_i^n} - x_{t_{i-1}^n} \right)^2 \delta_{\left\{ t_{i-1}^n \right\}}$$

dąży słabo do pewnej miary Radona ξ na $[0, T]$. Wahanie kwadratowe x względem ciągu podziałów (π_n) definiujemy jako

$$[x]_t = x_0^2 + \xi\,[0, t]$$

zaś jego część ciągłą $[x]_t^c$ definiujemy za pomocą równości

$$[x]_t = [x]_t^c + x_0^2 + \sum_{0 < s \leqslant t} \Delta x_s^2.$$

Twierdzenie Föllmera

Twierdzenie

Jeżeli $x : [0,T] \to \mathbb{R}$ *jest càdlàg i ma wahanie kwadratowe względem ciągu podziałów* (π_n) *oraz* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *jest funkcją klasy* C^2, *to zachodzi równość*

$$f(x_t) = f(x_0) + \int_{0+}^{t} f'(x_{s-})\,\mathrm{d}x_s + \frac{1}{2}\int_{0+}^{t} f''(x_{s-})\,\mathrm{d}[x]_s^c + \sum_{0<s\leqslant t}\left\{\Delta f(x_s) - f'(x_{s-})\,\Delta x_s\right\},$$

Twierdzenie Föllmera

Twierdzenie

Jeżeli $x : [0, T] \to \mathbb{R}$ *jest càdlàg i ma wahanie kwadratowe względem ciągu podziałów* (π_n) *oraz* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *jest funkcją klasy* C^2*, to zachodzi równość*

$$f(x_t) = f(x_0) + \int_{0+}^{t} f'(x_{s-})\, \mathrm{d}x_s + \frac{1}{2}\int_{0+}^{t} f''(x_{s-})\, \mathrm{d}[x]_s^c + \sum_{0<s\leqslant t} \{\Delta f(x_s) - f'(x_{s-})\, \Delta x_s\},$$

gdzie całka $\int_{0+}^{t} f'(x_{s-})\, \mathrm{d}x_s$ *jest zdefiniowana jako granica*

$$\int_{0+}^{t} f'(x_{s-})\, \mathrm{d}x_s = \lim_{n\to\infty} \sum_{i:t_i^n\leqslant t} f\left(x_{t_i^n}\right)\left(t_{i+1}^n - t_i^n\right).$$

Twierdzenie Föllmera - uwagi

Dowód twierdzenia Föllmera jest dosyć prosty, jednak główny problem tkwi w tym, że definicja całki $\int_{0+}^{t} f'(x_{s-})\,\mathrm{d}x_s$ a priori zależy od wyboru ciągu podziałów (π_n) i w gruncie rzeczy powinno być to uwzględnione w notacji, np. $(\pi_n)\int_{0+}^{t} f'(x_{s-})\,\mathrm{d}x_s$.

W przypadku wyboru dwóch różnych ciągów podziałów (π_n) oraz (ρ_n) może zachodzić

$$(\pi_n)\int_{0+}^{t} f'(x_{s-})\,\mathrm{d}x_s \neq (\rho_n)\int_{0+}^{t} f'(x_{s-})\,\mathrm{d}x_s.$$

Z twierdzenia Föllmera wynika, że jest to równoważne temu, że zachodzi

$$(\pi_n)[x]^c \neq (\rho_n)[x]^c.$$

Wahanie kwadratowe - alternatywna definicja, niezależna od ciągu podziałów

Niedawno, w [3], udowodnione został następujący wynik. Jeżeli X_t, $t \geqslant 0$, jest semimartyngałem, to dla dowolnego $T \geqslant 0$ p.n. zachodzi następująca zbieżność

$$\lim_{c \to 0+} c \cdot \mathrm{TV}^c(X, T) = [X]_T^c,$$

gdzie $\mathrm{TV}^c(X, T)$ oznacza *ucięte wahanie* X zdefiniowane jako

$$\mathrm{TV}^c(X, T) := \sup_n \sup_{0 \leqslant t_0 < t_1 < \ldots < t_n \leqslant T} \sum_{i=1}^n \max\left\{\left|X_{t_i} - X_{t_{i-1}}\right| - c, 0\right\}.$$

Wynik ten uogólnia (na przypadek semimartyngałów ze skokami) otrzymany wcześniej (we wspólnej pracy z Piotrem Miłosiem [4]) wynik dla semimartyngałów ciągłych.

Otwarte pytanie

Powstaje naturalne pytanie, czy można uzyskać analogiczy wynik do wyniku Föllmera, przez zastąpienie wahania kwadratowego $(\pi_n)\,[x]$, zdefiniowanego jako "dystrybuanta" miary Radona ξ, wahaniem kwadratowym zdefiniowanym jako suma

$$[x]_t := x_0^2 + [x]_t^{\mathrm{cont}} + \sum_{0<s\leqslant t} \Delta x_s^2,$$

gdzie

$$[x]_t^{\mathrm{cont}} := \lim_{c\to 0+} \mathrm{TV}^c(x,t)$$

(przy założeniu, że ta granica istnieje).

Kolejne naturalne pytanie to to, jak tak zdefiniowane wahanie ma się do wahania zdefiniowanego przez Föllmera.

Modelowanie procesów cen

Semimartyngały mają szerokie zastosowanie w modelowaniu procesów cen aktywów finansowych.

Od czasu ostatniego światowego kryzysu finansowego jednak coraz więcej uwagi poświęca się modelom, w których jak najmniej zakłada się o mierze probabilistycznej rządzącej procesami cen, gdyż błędne oszacowanie tej miary może mieć katastrofalne skutki związane z błędną wyceną aktywów.

Jednym z takich podejść jest podejście Vovka, oparte na minimalnych założeniach o braku arbitrażu 1. rodzaju.

Podejście Vovka, typowe procesy cen

Konstrukcję Vovka można uznać za pośrednią pomiędzy modelami deterministycznymi a modelami probabilistycznymi, w której jednak nie zakłada się nic o mierze probabilistycznej.

Rozważa się w niej przestrzeń Ω wszystkich (nieujemnych) ścieżek càdlàg $\omega : (0, T) \to \mathbb{R}$ a **typowe procesy cen** to te, które nie prowadzą do możliwości arbitrażu pierwszego rodzaju (osiągnięcie dowolnie dużych zysków przy poniesieniu małego, ustalonego poziomu ryzyka).

Vovk udowodnił, że typowe procesy cen, przy pewnych technicznych ograniczeniach na wielkość skoków ścieżki, mają *odpowienio zdefiniowane* wahanie kwadratowe

Podejście Vovka, miara zewnętrzna

Dodatkowo, dla dowolnej rodziny E ścieżek z Ω wprowadza się miarę zewnętrzną $\bar{\mathbb{P}}(E)$. Z grubsza mówiąc,

$$\begin{aligned}\bar{\mathbb{P}}(E) = &\text{minimalny kapitał początkowy, dla którego istnieje}\\ &\text{strategia handlowa nie prowadząca nigdy do długu}\\ &\text{i dająca w momencie } T \text{ wypłatę co najmniej } \mathbf{1}_E,\\ &\text{czyli co najmniej 1 jeżeli proces cen był ze zbioru } E\end{aligned}$$

Zbiór E jest **typowy** jeżeli $\bar{\mathbb{P}}(E) = 1$, tzn. dla dowolnego procesu cen $\omega \in E$ nie ma możliwości osiągnięcia na pewno wypłaty co najmniej 1, jeżeli się wystartuje z kapitału mniejszego niż 1.

Podejście Vovka - przypadek ciągły

Jeżeli zbiór Ω zastąpi się zbiorem **ciągłych** ścieżek $\omega : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, to okazuje się, że typowe procesy cen mają wiele własności charakteryzujących ciągłe semimartyngały, takie jak:

- istnienie (odpowiednio zdefiniowanego) wahania kwadratowego
- odpowiednik twierdzenia Dambisa, Dubinsa-Schwarza, mówiący, że jeżeli zbiór E jest **niezmienniczy** na ciągłą i niemalejącą (można się zatrzymać lecz nie cofnąć wstecz) zmianę czasu oraz dla każdego $\omega \in \Omega$, $\omega(0) = c$, to miara zewnętrzna $\bar{\mathbb{P}}(E)$ jest rowna mierze Wienera $\mathbb{W}^c(E)$, czyli mierze indukowanej na przestrzeni funkcji ciągłych przez proces Wienera startujący z c, $c + B$, gdzie B - standardowy ruch Browna.

Wnioski płynące z twierdzenia DDS dla ciągłych procesów cen

W szczególności, wszystkie własności standardowego ruchu Browna **niezmiennicze** ze względu na ciągłą i niemalejącą zmianę czasu pozostają prawdziwe dla typowych ciągłych procesów cen!
Przykładem takich własności są:

1. nieskończone 2-wahanie, czyli

$$V^2(\omega, [0, T]) := \sup_n \sup_{0 \leqslant t_0 < t_1 < \ldots < t_n \leqslant T} \sum_{i=1}^{n} (\omega(t_i) - \omega(t_{i-1}))^2 = +\infty;$$

2. skończone ψ-wahanie, gdzie $\psi(x) = x^2 / \ln \max(\ln|x|, e)$, czyli

$$V^{\psi}(\omega, [0, T]) := \sup_n \sup_{0 \leqslant t_0 < t_1 < \ldots < t_n \leqslant T} \sum_{i=1}^{n} \psi(\omega(t_i) - \omega(t_{i-1})) < +\infty.$$

Własności typowych ciągłych procesów cen, c.d.

Warto wspomnieć, że ψ jest funkcją o największym rzędzie w sąsiedztwie 0, dla której $V^{\psi}(\omega, [0, T]) < +\infty$ dla typowego ciągłego procesu cen ω (jak i dla standardowego ruchu Browna).

Podobnie, korzystając z własności niezmienniczości uciętego wahania względem (ciągłej i niemalejącej) zmiany czasu, oraz z jego własności dla standardowego ruchu Browna dostajemy, że zbiór ścieżek, dla których istnieje granica

$$\lim_{c \to 0+} c \cdot \mathrm{TV}^{c}(\omega, T),$$

dla dowolnego $0 < T < +\infty$, jest typowy. (Jest to w pewnym sensie mocne prawo wielkich liczb dla typowych procesów cen).

Granica ta jest naturalnym kandydatem na $[\omega]_T$.

Co wiadomo dla procesów cen o trajektoriach càdlàg ?

Dla typowych **nieujemnych** procesów cen $\omega : [0, T] \to \mathbb{R}$ o trajektoriach càdlàg można udowodnić, że

$$\sup_{c>0} c \cdot \mathrm{TV}^c(\omega, T) < +\infty,$$

dla dowolnego $T > 0$, co jest nieco słabsze niż istnienie granicy $\lim_{c \to 0+} c \cdot \mathrm{TV}^c(\omega, T)$.

Uwaga

Na poziomie funkcji deterministycznych można udowodnić, że ze skończoności $\sup_{c>0} c \cdot TV^c(f, T)$ *wynika skończoność* φ*-wahania:*

$$V^{\varphi}(f, [0, T]) := \sup_n \sup_{0 \leqslant t_0 < t_1 < \ldots < t_n \leqslant T} \sum_{i=1}^{n} \varphi\left(f(t_i) - f(t_{i-1})\right) < +\infty,$$

gdzie $\varphi(x) = x^2 / \max(\ln|x|, 1)^2$.

Otwarte pytania

Pytanie na poziomie typowych (nieujemnych) procesów cen o trajektoriach càdlàg : czy dla dowolnego $T > 0$ istnieje granica

$$\lim_{c \to 0+} c \cdot \mathrm{TV}^c(\omega, T)?$$

Pytania na poziomie ścieżek deterministycznych: Czy z faktu, że $\sup_{c>0} c \cdot \mathrm{TV}^c(f, T) < +\infty$, wynika skończoność $V^{\psi}(f, [0, T])$? Jeżeli nie, to czy np. wystarczy do tego istnienie dla dowolnego $t \in [0, T]$ granicy $\lim_{c \to 0+} c \cdot \mathrm{TV}^c(f, t)$?

Literatura

[1] H. Föllmer. Calcul d'Itô sans probabilités. *Séminaire de Probabilités XV*, 80:143–150, 1981.

[2] P. Lévy. Le mouvement brownien plan. *Amer. J. Math.*, 62:487–550, 1940.

[3] R. M. Łochowski. Asymptotics of the truncated variation of model-free price paths and semimartingales with jumps. *Preprint arXiv:1508.01269*, 2015.

[4] R. M. Łochowski and P. Miłoś. On truncated variation, upward truncated variation and downward truncated variation for diffusions. *Stochastic Process. Appl.*, 123(2):446–474, 2013.

[5] Philip E. Protter. *Stochastic integration and differential equations, 2nd ed.*, volume 21 of *Applications of Mathematics. Stochastic Modelling and Applied Probability*. Springer-Verlag, Berlin, 2004.

Podziękowania

Dziękuję za uwagę