O uciętej 1-wariacji ruchu Browna

Rafał Łochowski

Warsaw School of Economics

Będlewo 2008

p -wariacja ruchu Browna

Dla $p \leqslant 2$ p - wariacja standardowego ruchu Browna $(B_t, t \geqslant 0)$ na przedziale $[a, b]$:

$$\sup_n \sup_{a \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_n \leqslant b} \sum_{i=1}^{n} \left| B_{t_{i+1}} - B_{t_i} \right|^p = +\infty, \tag{1}$$

jest p.n. nieskończona (P. Lévy, 1940).

p -wariacja ruchu Browna

Dla $p \leqslant 2$ p - wariacja standardowego ruchu Browna $(B_t, t \geqslant 0)$ na przedziale $[a, b]$:

$$\sup_n \sup_{a \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_n \leqslant b} \sum_{i=1}^{n} \left| B_{t_{i+1}} - B_{t_i} \right|^p = +\infty, \tag{1}$$

jest p.n. nieskończona (P. Lévy, 1940).

Uwaga

Jeżeli $a \leqslant t_{1,k} < \cdots \leqslant t_{n_k,k} \leqslant b$ *jest zstępującym ciągiem podziałów przedziału* $[a, b]$*, o średnicy dążącej do* 0 *(Lévy, 1940) lub* $\max_{1 \leqslant i \leqslant n_k - 1}(t_{i+1,k} - t_{i,k}) = o(1/\ln(n_k))$ *(Dudley, 1973) to p.n. zachodzi*

$$\lim_{k \to \infty} \sum_{i=1}^{n_k} \left| B_{t_{i+1,k}} - B_{t_{i,k}} \right|^2 = b - a. \tag{2}$$

W przypadku $\max_{1 \leqslant i \leqslant n_k - 1}(t_{i+1,k} - t_{i,k}) = O(1/\ln(n_k))$ *powyższa równość nie musi zachodzić (de la Vega, 1974).*

Wszystkie przytoczone stwierdzenia pozostają w mocy dla **ruchu Browna z dryfem** μ, $W_t = B_t + \mu t$.

Wszystkie przytoczone stwierdzenia pozostają w mocy dla **ruchu Browna z dryfem** μ, $W_t = B_t + \mu t$.
Gdy $\lim_{k\to\infty} \max_{1\leqslant i\leqslant n_k-1}(t_{i+1,k} - t_{i,k}) = 0$, to większość składników $\left|B_{t_{i+1,k}} - B_{t_{i,k}}\right|$ jest rzędu $(t_{i+1,k} - t_{i,k})^{1/2}$ i dominują one liniowe składniki $\mu\left(t_{i+1,k} - t_{i,k}\right)$, dlatego zachodzi (2).

p -wariacja ruchu Browna z dryfem

Wszystkie przytoczone stwierdzenia pozostają w mocy dla **ruchu Browna z dryfem** μ, $W_t = B_t + \mu t$.
Gdy $\lim_{k\to\infty} \max_{1\leqslant i\leqslant n_k-1}(t_{i+1,k} - t_{i,k}) = 0$, to większość składników $\left|B_{t_{i+1,k}} - B_{t_{i,k}}\right|$ jest rzędu $(t_{i+1,k} - t_{i,k})^{1/2}$ i dominują one liniowe składniki $\mu\left(t_{i+1,k} - t_{i,k}\right)$, dlatego zachodzi (2).
Gdy $n \to \infty$ to zawsze można dobrać podział $a \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_n \leqslant b$ odcinka $[a, b]$ tak aby wystarczająco dużo składników $\left|B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right|$ było rzędu

$$\sqrt{\left(t_{i+1} - t_i\right) \ln \ln \left(1/\left(t_{i+1} - t_i\right)\right)},$$

które dominują liniowe składniki $\mu\left(t_{i+1} - t_i\right)$ i zachodzi (1).

ψ -wariacja ruchu Browna z dryfem

Dla $\psi(x) = x^2 / \ln(\ln(1/x) \vee e)$ p.n. zachodzi (Taylor, 1972):

$$\sup_n \sup_{a \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_n \leqslant b} \sum_{i=1}^{n} \psi\left(\left|B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right|\right) < +\infty,$$

ψ -wariacja ruchu Browna z dryfem

Dla $\psi(x) = x^2/\ln(\ln(1/x) \vee e)$ p.n. zachodzi (Taylor, 1972):

$$\sup_n \sup_{a \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_n \leqslant b} \sum_{i=1}^{n} \psi\left(\left|B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right|\right) < +\infty,$$

stąd natychmiast wynika, że również

$$\sup_n \sup_{a \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_n \leqslant b} \sum_{i=1}^{n} \psi\left(\left|W_{t_{i+1}} - W_{t_i}\right|\right) < +\infty, \tag{3}$$

ψ -wariacja ruchu Browna z dryfem

Dla $\psi(x) = x^2 / \ln(\ln(1/x) \vee e)$ p.n. zachodzi (Taylor, 1972):

$$\sup_n \sup_{a \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_n \leqslant b} \sum_{i=1}^{n} \psi\left(\left|B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right|\right) < +\infty,$$

stąd natychmiast wynika, że również

$$\sup_n \sup_{a \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_n \leqslant b} \sum_{i=1}^{n} \psi\left(\left|W_{t_{i+1}} - W_{t_i}\right|\right) < +\infty, \tag{3}$$

co więcej, ψ jest funkcją o największym możliwym rzędzie wokół 0, dla której zachodzi (3).

ψ -wariacja ruchu Browna z dryfem

Dla $\psi(x) = x^2 / \ln(\ln(1/x) \vee e)$ p.n. zachodzi (Taylor, 1972):

$$\sup_n \sup_{a \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_n \leqslant b} \sum_{i=1}^{n} \psi\left(\left|B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right|\right) < +\infty,$$

stąd natychmiast wynika, że również

$$\sup_n \sup_{a \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_n \leqslant b} \sum_{i=1}^{n} \psi\left(\left|W_{t_{i+1}} - W_{t_i}\right|\right) < +\infty, \tag{3}$$

co więcej, ψ jest funkcją o największym możliwym rzędzie wokół 0, dla której zachodzi (3).

Uwaga

W przypadku, gdy średnica podziałów dąży do 0, *to*

$$\lim_{\delta \to 0} \sup_n \sup_{a \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_n \leqslant b, \max_i (t_{i+1} - t_i) \leqslant \delta} \sum_{i=1}^{n} \psi\left(\left|W_{t_{i+1}} - W_{t_i}\right|\right) = b - a.$$

Ucięta p -wariacja ruchu Browna z dryfem

Dla dowolnych $p, c > 0$ zdefiniujemy p - wariację na przedziale $[a, b]$, uciętą na poziomie c, jako

$$V_{\mu}^{c,p}[a;b] = \sup_{n} \sup_{a \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_n \leqslant b} \sum_{i=1}^{n-1} \phi_{c,p}\left(\left|W_{t_{i+1}} - W_{t_i}\right|\right),$$

gdzie $\phi_{c,p}(x) = (x^p - c^p) \vee 0$.

Ucięta p -wariacja ruchu Browna z dryfem

Dla dowolnych $p, c > 0$ zdefiniujemy p - wariację na przedziale $[a, b]$, uciętą na poziomie c, jako

$$V_{\mu}^{c,p}[a;b] = \sup_{n} \sup_{a \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_n \leqslant b} \sum_{i=1}^{n-1} \phi_{c,p}\left(\left|W_{t_{i+1}} - W_{t_i}\right|\right),$$

gdzie $\phi_{c,p}(x) = (x^p - c^p) \vee 0$.
Z jednostajnej ciągłości W_t na przedziale $[a, b]$ wynika, że p - wariacja ucięta na poziomie c jest "wybijana" dla podziałów $a \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_n \leqslant b$, których średnica $\max_{1 \leqslant i \leqslant n-1}(t_{i+1} - t_i)$ nie jest zbyt mała i jest zmienną losową p.n. skończoną.

Plan prezentacji

W referacie zajmiemy się wartością oczekiwaną uciętej 1 - wariacji z dryfem. Plan referatu jest następujący

Plan prezentacji

W referacie zajmiemy się wartością oczekiwaną uciętej 1 - wariacji z dryfem. Plan referatu jest następujący

- Uniwersalne (z dokładnością do uniwersalnych stałych) oszacowania $\mathbb{E}V_{\mu}^{c,1}[0;T]$.
- Analiza zachowania $\mathbb{E}V_{\mu}^{c,1}[0;T]$ w zależności od parametrów c, μ i T.
- Szkic dowodu.
- Przykład zastosowania.

Uniwersalne oszacowania $\mathbb{E}V_\mu^{c,1}[0;T]$

Zachodzi następujące

Twierdzenie

Dla $c, T > 0$ i zdefiniowanej dalej funkcji F iloraz $\frac{\mathbb{E}V_\mu^{c,1}[0;T]}{F(\mu,c,T)}$ jest oddzielony zarówno od 0 jak i od ∞, w szczególności można przyjąć

$$\frac{1}{120} \leqslant \frac{\mathbb{E}V_\mu^{c,1}[0;T]}{F(\mu,c,T)} \leqslant 100.$$

Uniwersalne oszacowania $\mathbb{E}V_{\mu}^{c,1}[0;T]$

Zachodzi następujące

Twierdzenie

Dla $c, T > 0$ i zdefiniowanej dalej funkcji F iloraz $\frac{\mathbb{E}V_{\mu}^{c,1}[0;T]}{F(\mu,c,T)}$ jest oddzielony zarówno od 0 jak i od ∞, w szczególności można przyjąć

$$\frac{1}{120} \leqslant \frac{\mathbb{E}V_{\mu}^{c,1}[0;T]}{F(\mu,c,T)} \leqslant 100.$$

Dla $\mu = 0$ funkcja F przyjmuje postać

$$F(0,c,T) = \begin{cases} \frac{T}{c} & \text{dla } T \geqslant c^2, \\ (T)^{3/2}\frac{e^{-c^2/(2T)}}{c^2} & \text{dla } T < c^2. \end{cases}$$

Pomocnicze formuły

Dla $|\mu|, c, T > 0$ zdefiniujmy

$$\chi(c,\mu) = \sqrt{\frac{e^{2|\mu|c} - 1 - 2|\mu|c}{2\mu^2}} = c\sqrt{1 + \frac{2}{3}c|\mu| + \frac{1}{3}c^2\mu^2 + \ldots},$$

wówczas

$$F(\mu, c, T) = \begin{cases} \frac{T}{c} + |\mu|T & \text{dla } \sqrt{T} \geqslant \chi(c,\mu), \\ 2\sqrt{T} + |\mu|T - c & \text{dla } c - |\mu|T \leqslant \sqrt{T} < \chi(c,\mu), \\ (T)^{3/2}\frac{e^{-(c-|\mu|T)^2/(2T)}}{(c-|\mu|T)^2} & \text{dla } \sqrt{T} < c - |\mu|T. \end{cases}$$

Szkic dowodu

Ze względu na symetrię ruchu Browna możemy przyjąć, że $\mu \geqslant 0$. Niech T_c - czas pierwszego spadku procesu W_t o c:

$$T_c = \inf\{t \geqslant 0 : W_t \leqslant \sup_{0 \leqslant s \leqslant t} W_s - c\}.$$

Szkic dowodu

Ze względu na symetrię ruchu Browna możemy przyjąć, że $\mu \geqslant 0$. Niech T_c - czas pierwszego spadku procesu W_t o c:

$$T_c = \inf\{t \geqslant 0 : W_t \leqslant \sup_{0 \leqslant s \leqslant t} W_s - c\}.$$

Z definicji T_c wynika, że

$$V_\mu^{c,1}[0; T_c] = \max\{\sup_{0 \leqslant t \leqslant T_c} W_t - \inf_{0 \leqslant t \leqslant T_c} W_t - c, 0\}$$

oraz

$$V_\mu^{c,1}[0; T] \approx V_\mu^{c,1}[0; T \wedge T_c] + V_\mu^{c,1}[T \wedge T_c, T].$$

Szkic dowodu, c.d.

Dzięki temu, że wystarczająco duża część rozkładu zmiennej T_c jest skupiona wokół $\mathbb{E} T_c = \chi^2(\mu, c)$, dla $T \geqslant \mathbb{E} T_c = \chi^2(\mu, c)$ mamy

$$\mathbb{E} V_{\mu}^{c,1}[0; T] \approx \frac{T}{\chi^2(\mu, c)} \cdot \mathbb{E} \max\{ \sup_{0 \leqslant t \leqslant T_c} W_t - \inf_{0 \leqslant t \leqslant T_c} W_t - c, 0\}.$$

Szkic dowodu, c.d.

Dzięki temu, że wystarczająco duża część rozkładu zmiennej T_c jest skupiona wokół $\mathbb{E}\, T_c = \chi^2(\mu, c)$, dla $T \geqslant \mathbb{E}\, T_c = \chi^2(\mu, c)$ mamy

$$\mathbb{E} V_\mu^{c,1}[0; T] \approx \frac{T}{\chi^2(\mu, c)} \cdot \mathbb{E} \max\{ \sup_{0 \leqslant t \leqslant T_c} W_t - \inf_{0 \leqslant t \leqslant T_c} W_t - c, 0 \}.$$

Dla $T < \mathbb{E}\, T_c$

$$\mathbb{E} V_\mu^{c,1}[0; T] \approx \mathbb{E} \max\{ \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} W_t - \inf_{0 \leqslant t \leqslant T} W_t - c, 0 \}.$$

Szkic dowodu, c.d.

Dzięki temu, że wystarczająco duża część rozkładu zmiennej T_c jest skupiona wokół $\mathbb{E}\,T_c = \chi^2(\mu, c)$, dla $T \geqslant \mathbb{E}\,T_c = \chi^2(\mu, c)$ mamy

$$\mathbb{E}\,V_\mu^{c,1}\,[0;\,T] \approx \frac{T}{\chi^2(\mu, c)} \cdot \mathbb{E}\max\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T_c} W_t - \inf_{0\leqslant t\leqslant T_c} W_t - c, 0\}.$$

Dla $T < \mathbb{E}\,T_c$

$$\mathbb{E}\,V_\mu^{c,1}\,[0;\,T] \approx \mathbb{E}\max\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T} W_t - \inf_{0\leqslant t\leqslant T} W_t - c, 0\}.$$

Tu dowód rozpada się na 2 części - gdy prawdopodobieństwo $\mathbb{P}\left(\sup_{0\leqslant t\leqslant T_c} W_t - \inf_{0\leqslant t\leqslant T_c} W_t > c\right)$ jest duże, co odpowiada $c \leqslant \sqrt{T} + \mu T$

Szkic dowodu, c.d.

Dzięki temu, że wystarczająco duża część rozkładu zmiennej T_c jest skupiona wokół $\mathbb{E}\, T_c = \chi^2(\mu, c)$, dla $T \geqslant \mathbb{E}\, T_c = \chi^2(\mu, c)$ mamy

$$\mathbb{E} V_{\mu}^{c,1}[0; T] \approx \frac{T}{\chi^2(\mu, c)} \cdot \mathbb{E} \max\{\sup_{0 \leqslant t \leqslant T_c} W_t - \inf_{0 \leqslant t \leqslant T_c} W_t - c, 0\}.$$

Dla $T < \mathbb{E}\, T_c$

$$\mathbb{E} V_{\mu}^{c,1}[0; T] \approx \mathbb{E} \max\{\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} W_t - \inf_{0 \leqslant t \leqslant T} W_t - c, 0\}.$$

Tu dowód rozpada się na 2 części - gdy prawdopodobieństwo $\mathbb{P}\left(\sup_{0 \leqslant t \leqslant T_c} W_t - \inf_{0 \leqslant t \leqslant T_c} W_t > c\right)$ jest duże, co odpowiada $c \leqslant \sqrt{T} + \mu T$ oraz dla $c > \sqrt{T} + \mu T$ gdy maleje ono jak $\exp(-(c - \mu t)^2/(2T))$.

Pewne zastosowanie uciętej 1 - wariacji w matematyce finansowej

Założenia:

- Dynamiką cen akcji, P_t rządzi geometryczny ruch Browna,

$$dP_t = \mu P_t dt + \sigma P_t dB_t.$$

- Za każdą transakcję pobierana jest prowizja proporcjonalna do wielkości transakcji.
- $\gamma \in (0, 1)$ jest proporcją wartości transakcji pobieraną jako prowizja.

Pewne zastosowanie uciętej 1 - wariacji w matematyce finansowej

Założenia:

- Dynamiką cen akcji, P_t rządzi geometryczny ruch Browna,

$$dP_t = \mu P_t dt + \sigma P_t dB_t.$$

- Za każdą transakcję pobierana jest prowizja proporcjonalna do wielkości transakcji.
- $\gamma \in (0, 1)$ jest proporcją wartości transakcji pobieraną jako prowizja.

Wniosek: maksymalny zwrot jaki można osiągnąć z handlu tymi akcjami na przedziale czasowym $[0, T]$ jest ograniczony z góry przez

$$\exp(V^{c/\sigma,1}_{\mu/\sigma-\sigma/2}[0; T]) - 1,$$

gdzie $c = \ln \frac{1+\gamma}{1-\gamma}$.

Szkic dowodu

Niech $0 \leqslant t_{b_1} < t_{s_1} < ... < t_{b_n} < t_{s_n} \leqslant T$,
t_{b_i} - momenty zakupu akcji,
t_{s_j} - momenty sprzedaży akcji.

Szkic dowodu

Niech $0 \leqslant t_{b_1} < t_{s_1} < \ldots < t_{b_n} < t_{s_n} \leqslant T$,
t_{b_i} - momenty zakupu akcji,
t_{s_j} - momenty sprzedaży akcji.
Cena akcji w momencie t wyraża się wzorem $P_t = \exp(\mu t - \sigma^2 t/2 + \sigma B_t)$
i zwrot z handlu akcjami wyraża się wzorem $\prod_{i=1}^{n} \left\{ \frac{P_{t_{s_i}}}{P_{t_{b_i}}} \frac{1-\gamma}{1+\gamma} \right\} - 1$.
Oznaczmy $\tilde{\mu} = \mu - \sigma^2/2$ i niech M_n będzie zbiorem podziałów
$\pi = \{0 \leqslant t_{b_1} < t_{s_1} < \ldots < t_{b_n} < t_{s_n} \leqslant T\}$, wówczas

Szkic dowodu

Niech $0 \leqslant t_{b_1} < t_{s_1} < \ldots < t_{b_n} < t_{s_n} \leqslant T$,
t_{b_i} - momenty zakupu akcji,
t_{s_j} - momenty sprzedaży akcji.
Cena akcji w momencie t wyraża się wzorem $P_t = \exp(\mu t - \sigma^2 t/2 + \sigma B_t)$
i zwrot z handlu akcjami wyraża się wzorem $\prod_{i=1}^n \left\{ \frac{P_{t_{s_i}}}{P_{t_{b_i}}} \frac{1-\gamma}{1+\gamma} \right\} - 1$.
Oznaczmy $\tilde{\mu} = \mu - \sigma^2/2$ i niech M_n będzie zbiorem podziałów
$\pi = \{0 \leqslant t_{b_1} < t_{s_1} < \ldots < t_{b_n} < t_{s_n} \leqslant T\}$, wówczas

$$\begin{aligned}
\sup_n \sup_{M_n} \prod_{i=1}^n \left\{ \frac{P_{t_{s_i}}}{P_{t_{b_i}}} \frac{1-\gamma}{1+\gamma} \right\} &= \sup_n \sup_{M_n} \prod_{i=1}^n \left\{ \frac{\exp\left(\tilde{\mu} t_{s_i} + \sigma B_{t_{s_i}}\right)}{\exp\left(\tilde{\mu} t_{b_i} + \sigma B_{t_{b_i}}\right)} e^{-c} \right\} \\
&= \sup_n \sup_{M_n} \exp\left(\sigma \sum_{i=1}^n \left\{ \left(\frac{\tilde{\mu}}{\sigma} t_{s_i} + B_{t_{s_i}} \right) - \left(\frac{\tilde{\mu}}{\sigma} t_{b_i} + B_{t_{b_i}} \right) - \frac{c}{\sigma} \right\} \right) \\
&\leqslant \exp\left(\sigma V^{c/\sigma}_{\tilde{\mu}/\sigma} [0, T] \right) = \exp\left(\sigma V^{c/\sigma}_{\mu/\sigma - \sigma/2} [0, T] \right).
\end{aligned}$$

Opinia eksperta

Valerii Salov (NumeriX, LLC), autor książki *Modeling Maximum Trading Profits with C++*:
"Since your study a function variation for underlying Brownian process, there is clear link between the concepts. Especially, because you are considering a variation neglecting small jumps. (...)
Of course, Brownian motion is the first simplifying candidate in many of such approaches. (...)
However, this cannot serve as an estimate of a "true" value because Brownian process is continuous. Theoretically it has life between the points of observations. They are missed for a realization. Anyway, I was very oriented on analysis of real systems. Additionally, I do not very much believe into lognormal price processes. (...)"

[Borodin, Salminen, 1996] Borodin A. N., Salminen P., *Handbook of Brownian Motion, Facts and Formulae*, Birkhäuser, Basel
[de la Vega, 1974] de la Vega F. W., *On almost sure convergence of quadratic Brownian variation*, Ann. Probab. **2**
[Dudley, 1973] Dudley R. M., *Sample fuctions of the Gaussian process*, Ann. Probab. **1**
[Lévy, 1940] Lévy P., *Le mouvement brownien plain*, Amer. J. Math. **62**
[Taylor, 1972] Taylor S. J., *Exact asymptotic estimates of Brownian path variation*, Duke Math. J. **39**
[Taylor, 1975] Taylor H. M., *A stopped Brownain motion formula*, Ann. Probab. **3**
[Salov, 2007] Salov V., *Modeling Maximum Trading Profits with C++*, Wiley, New York

Podziękowania

Dziękuję za uwagę