

WYZNACZNIKI

1. Obliczyć wyznacznik, stosując rozwinięcie Laplace'a względem wybranego wiersza lub kolumny:

$$\text{a) } \det \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{b) } \det \begin{bmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 5 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{c) } \det \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. a) Stosując rozwinięcie Laplace'a względem trzeciego wiersza, obliczyć wyznaczniki macierzy:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -1 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & 5 \\ -2 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ 0 & \beta & \alpha \\ \beta & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

b) Powtórzyć obliczenia, stosując rozwinięcie Laplace'a względem trzeciej kolumny.

3. Obliczyć wyznaczniki następujących macierzy:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ -3 & 5 & 0 \end{bmatrix}.$$

4. Obliczyć wyznaczniki podanych macierzy, sprowadzając je uprzednio do postaci macierzy trójkątnej.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -1 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

5. Obliczyć podane wyznaczniki, wykorzystując własności wyznacznika:

$$\text{a) } \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \end{bmatrix}, \quad \text{b) } \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & 0 & 4 \\ -1 & -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

6*. Nie obliczając wyznaczników, znaleźć rozwiązanie podanego równania:

$$\det \begin{bmatrix} 1-x & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 6-x & 4 & 4 \\ 6 & 6 & 6 & x \end{bmatrix} = 0.$$

7. Znaleźć dopełnienie algebraiczne elementu $a_{22} = 4$ oraz $a_{13} = 5$ macierzy \mathbf{A} :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 5 \\ 0 & 4 & 6 \\ 3 & -1 & 8 \end{bmatrix}.$$

8. Obliczyć wyznacznik macierzy \mathbf{A} metodą Sarrusa. Znaleźć macierz dopełnień, a następnie obliczyć jej wyznacznik, wykorzystując wzór na macierz odwrotną oraz odpowiednie własności wyznaczników:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

9. Pokazać, że $\det \mathbf{AB} = \det \mathbf{A} \det \mathbf{B}$, jeśli:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

10. Wyznaczyć macierz dopełnień algebraicznych dla podanych macierzy:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 11 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

11. Wyznaczyć macierz odwrotną do macierzy \mathbf{A} za pomocą dopełnień algebraicznych:

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{b) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{c) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad \text{d) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

12. Rozwiązać równanie z niewiadomą x .

$$\text{a) } \det \begin{bmatrix} (x-1) & 2x \\ (2-x) & -3 \end{bmatrix} = 0, \quad \text{b) } \det \begin{bmatrix} x & (x+1) \\ (x-1) & (x+2) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ -2 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\text{c) } \det \begin{bmatrix} x & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2x & -1 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & x-1 \\ 2 & -1 & 0 \\ x & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

13. Rozwiązać układy równań metodą Cramera

$$\text{a) } \begin{cases} x + 7y = 2, \\ 2x - y = 9, \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x - y + z = 1, \\ -x + y + 2z = -1, \\ 2x - y + z = 3. \end{cases}$$

14. Rozwiązać powyższe układy, wyznaczając z macierzowego równania $\mathbf{AX} = \mathbf{b}$ macierz \mathbf{X} .

15. Rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ -x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 8, \\ 2x_1 + 3x_2 = 7. \end{cases}$$

16. Rozwiązać układ równań w zależności od parametru k :

$$\begin{cases} 3k + x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 + kx_2 + 3x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + 4x_3 = k. \end{cases}$$

17. Dla jakich wartości parametru p podany układ równań jest układem Cramera? Rozwiązać ten układ dla znalezionych wartości parametru.

$$\begin{cases} px + y + z = 1, \\ x + y - z = p, \\ x - y + pz = 1. \end{cases}$$

18. Wyznaczyć macierz \mathbf{X} z równania macierzowego $\mathbf{C} = (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{X})^T\mathbf{B} + 2\mathbf{B}$, gdzie \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} są danymi macierzami nieosobliwymi stopnia 3. Obliczyć $\det \mathbf{X}$, wiedząc, że $\det \mathbf{A} = 2$, $\det \mathbf{B} = 3$, $\det \mathbf{C} = 4$.

19. Dane są macierze:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \\ -3 & -5 & 2 \end{bmatrix}.$$

- Wyznaczyć macierz \mathbf{C} daną wzorem $\mathbf{C} = \mathbf{A}^T\mathbf{A} + 4 \det(\mathbf{I} - \mathbf{B})\mathbf{B}^{-1}$.
- Wyznaczyć rząd każdej z macierzy: \mathbf{A} , \mathbf{B} oraz $\mathbf{I} - \mathbf{B}$.

20. Zbadać, dla jakich wartości parametru k macierz $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} k & 0 & 1 \\ k & 1 & 1 \\ 1 & -1 & k \end{bmatrix}$ jest odwracalna. Dla znalezionych wartości k wyznaczyć macierz \mathbf{X} spełniającą równanie $\mathbf{B}^{-1} \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

21. Dane są macierze:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 4 & -10 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

oraz macierz \mathbf{C} stopnia 3 taka, że $\det \mathbf{C} = 1$. Obliczyć $\det (3\mathbf{B}^{-1}\mathbf{C}^T\mathbf{A})$.